3) Integriere den Faktor (Eulerscher Multiplikator)

Es sei \( f(x,y) dx + g(x,y) dy = 0 \) \((x,y) \in \mathbb{C}\)

in \( G \) nicht exakt.

Def: Eine Funktion \( \mu = \mu(x,y) \) \((\mu \in C^1(G))\) heißt integrierender Faktor für \( f/g \) falls (die zu \( \mu \) äquivalente

\[ (\mu f) \, dx + (\mu g) \, dy = 0 \]

in \( G \) erfüllt ist.

Die Existenz von \( \mu \) bedeutet die folgende Bedingung

für \( \mu = \mu(x,y) \):

\[ (\partial_2 \mu) \frac{f}{g} - (\partial_1 \mu) \frac{g}{f} = \mu \left( f \frac{\partial g}{f} - g \frac{\partial f}{g} \right) \]

Für Lösung dieser Gleichung machen wir den folgenden

Ansatz: Es sei \( y = y(x,y) \in C^1(G) \) gegeben, durch

\( y(x,y) = y_1 = x^2 + y^2 = x + y, x - y, xy, \frac{x}{y} \)

Berechnet \( H = H(y) \) so, dass

\[ \mu = \mu(x,y) = H(y(x,y)), x,y \in \mathbb{C}, \]

Integrierender

Faktor für \( f/g \) wird, also (3) löst. (3) wird mit (4) zu:

\[ H'(y(x,y)) = H'(y(x,y)) \tilde{w}(x,y) \quad \text{mit} \]

\[ \tilde{w}(x,y) = \frac{D_1 y - D_2 x}{D_2 x + D_1 y - f(x,y) D_2 y + g(x,y) D_1 x} \quad \text{Der Ansatz} \]

(4) hat etwas gebracht, falls \( \tilde{w}(x) = W(y(x,y)) \) gilt,

dann kann dann wird (5) zu:

\[ H'(y(x,y)) = H'(y(x,y)) W(y(x,y)) \quad \text{mit der Lösung} \]
Beispiel: \( y' + p(x)y + q(x)y = 0 \) 
\( p(x,y) = \exp \left( \int \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx \right) \)

\( 2) \ y' - \left( x^2 + y^2 + x \right) y = 0 \) 

Löst mit 
\( x + y = x^2 + y^2 \) einen integrierenden Faktor

\[ p(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \]. Die zugehörige exakte

Dort findet die Darstellung Beisp 2) in S. 27 mit...

2.5.4 \underline{Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung.} (und Äußere Worte)

\underline{Problemformulierung}

Es sei \( I \subseteq \mathbb{R} \) ein Intervall, \( x_0 \in I \).

Mit \( p, q : I \to \mathbb{R} \), gegebene stetige, beschränkte Funktionen, und

\[ (y''(x) + p(x)y' + q(x)y) \]

gebildet und das folgende Problem gestellt:

\( y \in C^2[I] \) mit 

\( (y''(x_0) = f_0, x \in I, \)

\[ y(x_0) = x_0, y'(x_0) = \beta \]

(wobei \( \alpha, \beta \) vorgegebene Zahlen sind)

Dieses Problem bezeichnen wir mit \( A(p, \alpha, \beta) \). 
\( y \in A(p, \alpha, \beta) \) soll im folgenden eine Form haben, dass

\( y \) das Problem \( A(p, \alpha, \beta) \) löst.
Satz 1: Unter den obigen formulierten Voraussetzungen
besitzt das Problem \( A(p, a, b) \) für jedes Tripel
von Daten \( Ef, a, b \) genau eine Lösung.

\[ \text{Folgerung: } \quad y \in A(0, 0, 0) \iff y = 0 \]

Satz 2 (Linearität der Problemstellung / Superpositionssatz)
Aus \( y_j \in A(p, a, b_j) \) (\( j = 1, \ldots, k \))
folgt für beliebige Zahlen \( c_j, \ldots, c_k \in \mathbb{R} \)
\[ \sum_{j=1}^{k} c_j y_j \in A\left( \sum_{j=1}^{k} c_j p_j, \sum_{j=1}^{k} c_j a_j, \sum_{j=1}^{k} c_j b_j \right) \]

3. Struktur der Lösungen von \( A(p, a, b) \)

Mit der Bezeichnung (siehe auch [177])
\[ L_p = \{ y : Ly = f \text{ und } I \} \quad (= \text{allgemeine Lösung der Gleichung } Ly = f) \]
gilt: \( \text{Satz 3: } \quad \exists \exists z, y_p \in L_p \text{ gegeben. Dann gilt } \)
\[ L_p = \{ y \} / y = y_p + y_0, y_0 \in L_0 \quad \]
Ausführlich besagt dies:

Alle Lösungen von \( Ly = f \) erhält man, indem man
zu allen Lösungen der homogenen Gleichung \( Ly = 0 \)
eine Lösung \( y_p \) der inhomogenen Gleichung addiert.