

Höhere Mathematik III für Physik

3. Übungsblatt

(wird am Freitag, den 22.11.2018 besprochen)

Aufgabe 1 (Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme.

- (1) $y'' + 2y' + 2y = \cos(x)$ mit $y(0) = \frac{1}{5}$, $y'(0) = \frac{7}{5}$.
- (2) $y'' + y = \tan(x)$ mit $y(0) = y'(0) = 1$.
- (3) $y''' - y'' + y' - y = 2e^{-x}$.

Aufgabe 2 (Eulersche Differentialgleichung)

Lösen Sie die folgenden Eulerschen Differentialgleichungen auf $(0, \infty)$.

- (1) $x^2y'' + xy' - y = 0$.
- (2) $x^2y'' - 3xy' + 4y = \log(x)$.

Aufgabe 3 (Potenzreihenansatz)

Machen Sie bei den folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertproblemen den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$, dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ stets konstant.

- (1) (Legendre Differentialgleichung) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0$.
- (2) (Hermiteische Differentialgleichung) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.
- (3) $xy' - y = x^2e^x$ mit $y'(0) = 1$.

Aufgabe 4 (Potenzreihenansatz bei singulären Punkten)

In dieser Aufgabe geht es herauszufinden, wieso es wichtig sein kann, dass der Koeffizient vor dem höchsten Ableitungsgrad **nicht** verschwinden sollte für den Potenzreihenansatz. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(*) \begin{cases} x^2y'' - xy' + y = 0, \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Gehen Sie folgendermaßen vor:

- (a) Machen Sie einen Potenzreihenansatz $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ für die Differentialgleichung (*). Sehen Sie ein, dass y_1 nicht die allgemeine Lösung sein kann, da die Anfangswerte nicht passen können.
- (b) Fassen Sie die Differentialgleichung (*) als Eulersche Differentialgleichung auf und lösen Sie diese.
- (c) Stellen Sie die allgemeine und spezielle Lösung der Differentialgleichung bzw. des Anfangswertproblems (*) auf.
- (d) Warum funktioniert hier nicht der Potenzreihenansatz (Vermutung)? Im Vergleich zu Aufgabe 3 (1)?