06.12.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

# Höhere Mathematik III für Physik

## 4. Übungsblatt
## (wird am Freitag, den 07.12.2018 besprochen)

### Aufgabe 1 (Approximation Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

Seien $a > 0$ fest, $M := [0, a] \times \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Weiter seien $f$ stetig auf $M$ und gleichmäßig Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Komponente. Wir setzen die Funktionenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $[0, a]$ durch

$$x_0(t) \equiv x_0,\ x_{n+1} := x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-\tau)\, f(\tau, x_n(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie nun, dass die Funktionenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig auf $[0, a]$ konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass die Grenzfunktion $x(t) := \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ zweimal differenzierbar ist mit

$$x''(t) = f(t, x(t)) \text{ auf } [0, a]$$

und Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $x'(0) = x_1$.

### Aufgabe 2 (Anwendung vom Satz von Picard-Lindelöf)

Gegeben sei die Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, y') \mapsto x^2 - 2xy' + \frac{3}{2}y'^2 - y$$

und ein Punkt $(x_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x_0, y_0, y_0') = 0 \text{ und } y_0' \neq \frac{2}{3}x_0.$$

Zeigen Sie, dass das so gegebene implizite Anfangswertproblem

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

lokal eindeutig lösbar ist.

### Aufgabe 3 (Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes)

Gegeben Sei der Operator $T : C^0[0, 1] \to C^0[0, 1]$ durch

$$(Tf)(x) := 1 + x \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,\ \ x \in [0, 1],\ \ f \in C^0[0, 1].$$

Zeigen Sie, dass der Operator $T$ genau einen Fixpunkt $f^* \in C^0[0, 1]$ hat. Welches Anfangswertproblem löst dann dieser Fixpunkt $f^*$?

### Aufgabe 4 (Typische Picard-Lindelöf-Aufgabe)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $y$ auf dem Intervall $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hat und dieses auch gleich das größte Lösungsintervall ist, welches wir mithilfe des Satzes von Picard-Lindelöf erhalten. Berechnen Sie anschließend die ersten Schritte der Picard-Iteration $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}$ und $y^{(3)}$.