12.12.2018
PD Dr. Peer Kunstmann
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Physik

4. Tutoriumsblatt
(wird am Freitag, den 14.12.2018 besprochen)

Aufgabe 1 (Hinreichendes Kriterium für lokal Lipschitz-stetig)

Zeigen Sie:

(a) Seien $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge und $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Ist die Menge K kompakt und konvex, sowie f stetig differenzierbar, so ist die Funktion f Lipschitz-stetig.

(b) Seien $\emptyset \neq = \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, sowie $f\colon U \to \mathbb{R}^n,\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion. Ist f stetig partiell differenzierbar bzgl. der zweiten Variable, so ist f lokal Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Variable auf U.

Aufgabe 2 (Picard-Lindelöf)

Untersuchen Sie stets, ob die Funktion f auf dem angegebenen Rechteck R einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. der zweiten Variable erfüllt. Weiter prüfen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, ob Sie sagen können, dass es eine lokal eindeutige Lösung y auf einem gewissen Intervall gibt für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y\,(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Geben Sie weiter das maximale Lösungsintervall $I_{\max}$ an. Wie sehen die ersten Schritte (y_0, y_1, y_2) der Picard-Iteration aus?

(1)
$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 y} \cos(xy) \text{ auf } R = [0, 1] \times [-\pi, \pi],\ x_0 = y_0 = 0.$$

(2)
$$f(x, y) = \sqrt{1 + x + y^2} \text{ auf } R = [1, \infty) \times \mathbb{R},\ x_0 = y_0 = 1.$$

(3)
$$f(x, y) = x\sqrt{|y|} \text{ auf } R = [0, \infty) \times \mathbb{R},\ x_0 = y_0 = 0.$$

Aufgabe 3 (Lösung von Integralgleichung)

Sei $g \in C^0[0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$f(x) - \int_0^x f(x - t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = g(x) \text{ für alle } x \in [0, 1]$$

genau eine Lösung $f \in C^0[0, 1]$ besitzt. Formulieren Sie zuerst ein geeignetes Fixpunktproblem.