Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Computerunterstützte analytische Methoden für Rand- und Eigenwertprobleme Sommersemester 2017

28.06.2017

Übungsblatt 9

Aufgabe 23:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\lambda_i(\Omega)$ bezeichne den i-ten Eigenwert des Eigenwertproblems

$$u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx \quad (v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)).$$

Die Folge der Eigenwerte sei der Größe nach geordnet: $\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \cdots$.

(i) Zeigen Sie: Ist $\Omega_1 \subset \Omega_2$, so gilt $\lambda_i(\Omega_2) \leq \lambda_i(\Omega_1)$ $(i \in \mathbb{N})$.

(ii) Es seien $a, b \in (0, \infty)$ und

$$E_{a,b} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(\tfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{b}\right)^2 < 1\right\}$$

eine Ellipse. Finden Sie eine optimale Einschließung $\lambda_1(E) \in [\lambda_1(\Omega_2), \lambda_1(\Omega_1)]$, wobei $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ achsenparallele Rechtecke mit $\Omega_1 \subset E \subset \Omega_2$ seien.

Aufgabe 24:
Sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$. Konstruieren Sie eine Homotopie zur Berechnung unterer Schranken für die Eigenwerte des Problems

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ \quad\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 25:
Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda(2+\sin(x))u(x) & \text{in } (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(i) Geben Sie eine schwache Formulierung mittels einer geeigneten Bilinearform M im Raum $\mathrm{L}^2((0,\pi);g)$ an, wobei das Skalarprodukt durch

$$\langle u, v\rangle := \langle gu, v\rangle_{\mathrm{L}^2}$$

mit $g(x) = 2 + \sin(x)$ definiert sei.

(ii) Berechnen Sie mittels des Rayleigh-Ritz-Verfahrens eine obere Schranke Λ_1 für den ersten Eigenwert des Problems (1).
Hinweis: Verwenden Sie $\tilde{u}(x) = \sin(x)$ als numerisches Basiselement.

(iii) Ermitteln Sie durch den Vergleich von (1) mit einem geeigneten Vergleichsproblem ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $\Lambda_1 < \rho \leq \lambda_2$.

(iv) Verwenden Sie das Temple-Lehmann-Verfahren, um eine untere Schranke $\underline{\lambda}_1$ für λ_1 zu berechnen.

Die Aufgaben werden in der Übung am 05.07.2017 besprochen.