Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Computerunterstützte Beweise bei partiellen Differentialgleichungen - Übungsblatt 9

Aufgabe 25

Sei $M : D(M) \times D(M) \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, auf $D(M) \subseteq H$ definierte, positiv semidefinite Bilinearform. Betrrachten Sie das Problem, für gegebenes $u \in H$ ein $w \in D(M)$ mit

$$M[w,v] = \langle u, v \rangle \qquad (v \in D(M)) \tag{1}$$

zu finden.

a) Beweisen Sie das folgende komplementäre Variationsprinzip: $w \in D(M)$ löst (1) genau dann, wenn

$$-M[w,w] = \min\{M[v,v] - 2\langle u,v\rangle : v \in D(M)\}$$

gilt und das obige Minimum im Punkt $v = w$ angenommen wird.

b) Sei X ein reeller Vektorraum, $T : D(M) \to X$ ein linearer Operator und $b : X \times X \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positiv semidefinite Bilenearform mit

$$M[\tilde{u}, \tilde{v}] = b[T\tilde{u}, T\tilde{v} \qquad (\tilde{u}, \tilde{v} \in D(M)).$$

Beweisen Sie: Jede Lösung von (1) erfüllt

$$M[w,w] = \min\{b[\tilde{w}, \tilde{w}] : \tilde{w} \in V_u\},$$

wobei $V_u := \{\tilde{w} \in X : b[\tilde{w}, Tv] = \langle u, v\rangle \text{ für alle } v \in D(M)\}$.

Aufgabe 26

Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) & = \lambda(2+\sin(x))u(x) \qquad \text{auf } (0,\pi) \\ 0 & = u(0) = u(\pi). \end{cases} \tag{2}$$

a) Geben Sie eine schwache Formulierung mittels einer geeigneten Bilinearform M im Raum $L^2((0,\pi); g)$ an, wobei das Skalarprodukt durch

$$\langle u, v\rangle := \langle gu, v\rangle_{L^2},$$

$g(x) = (2+\sin(x))$ definiert sei.

b) Berechnen Sie mittels Rayleigh-Ritz-Verfahrens eine obere Schranke Λ_1 für den ersten Eigenwert des Problems (2) (Hinweis: Verwenden Sie $\tilde{u}(x) = \sin(x)$ als Basiselement.).

c) Ermitteln Sie durch den Vergleich von (2) mit einem geeigneten Vergleichsproblem ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $\Lambda_1 < \rho \leq \lambda_2$.

d) Verwenden Sie das Lehmann-Verfahren, um eine untere Schranke $\underline{\lambda}_1$ für λ_1 zu berechnen.

Aufgabe 27

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^1- Rand. Definiere

$$\begin{cases} M[u,v] & = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ D(M) & = \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u \, dx = 0\} \end{cases}$$

und betrachten Sie das Eigenwertproblem $M[u,v] = \lambda \langle u, v \rangle_{L^2}$, $(v \in D(M))$. Wie lautet dessen starke Formulierung? Setze weiter

$$X := D(M) \times L^2(\Omega)$$
$$Tu := \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} \in X$$
$$b[(\hat{u}_1, \hat{u}_2), (\hat{v}_1, \hat{v}_2)] := \int_\Omega \nabla \hat{u}_1 \cdot \nabla \hat{u}_2 + \gamma \int_\Omega (\hat{u}_2 \hat{v}_2 - \hat{u}_1 \hat{v}_1) \, dx$$

mit $\gamma \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: b ist mit einer geeigneten Wahl von $\gamma > 0$ positiv semidefinit und es gilt:

$$M[u,v] = b[Tu, Tv] \qquad (u, v \in D(M)).$$

b) Konstruieren Sie Elemente $\hat{w} \in X$ mit

$$b[\hat{w}, Tv] = \langle u, v \rangle \qquad (v \in D(M))$$

zu vorgegebenem $u \in D(M)$.