Studienbegleitende Prüfung / Modulprüfung / Diplomprüfung
Funktionentheorie I
SS 2010
Lösungsvorschläge – Version vom 23.8.2010

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := \dfrac{5-5i}{1-2i} + e^{z-\overline{z}}$.
Geben Sie $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ als Funktionen von $x := \operatorname{Re} z$ und $y := \operatorname{Im} z$ an.

b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$, für die $\operatorname{Im} g(z) = x^2 - y^2 + e^x \cos y$ mit $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$, $z \in \mathbb{C}$ gilt.
(Es genügt, die Lösung(en) in der Form $g = g(x, y)$ anzugeben.)

Lösung
a)
Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt (mit $x := \operatorname{Re} z$ und $y := \operatorname{Im} z$)

$$f(z) = \frac{5-5i}{1-2i} + e^{z-\overline{z}} = 5\frac{(1-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} + e^{x+iy-(x-iy)} =$$

$$5\frac{3+i}{5} + e^{2iy} = 3 + i + \cos(2y) + i\sin(2y).$$

Also folgt

$$\operatorname{Re} f(z) = 3 + \cos(2y) \text{ und}$$

$$\operatorname{Im} f(z) = 1 + \sin(2y).$$

b)
Wie üblich setzen wir $u(x, y) := \operatorname{Re} g(x + iy)$ und $v(x, y) := \operatorname{Im} g(x + iy)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Insbesondere soll also $v(x, y) = x^2 - y^2 + e^x \cos y$ gelten.

Damit g holomorph ist, müssen in jedem Punkt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ gelten (und insbesondere die entsprechenden partiellen Ableitungen existieren).

Wir erhalten $u_x = v_y = -2y - e^x \sin y$. Daraus folgt $u(x, y) = -2yx - e^x \sin y + h(y)$ mit einer gewissen differenzierbaren reellwertigen Funktion $h = h(y)$ und damit $u_y = -2x - e^x \cos y + h'(y)$.

Andererseits soll $u_y = -v_x = -(2x + e^x \cos y)$ gelten. Wir erhalten $h' \equiv 0$ und daraus (weil $\mathbb{E}$ zusammenhängend ist) $h \equiv c$ mit einer gewissen Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Alle Lösungen g haben also die Form $g = g(x, y) = -2yx - e^x \sin y + c + i(x^2 - y^2 + e^x \cos y)$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Umgekehrt sieht man mit Hilfe der obigen Rechnung direkt (weil die partiellen Ableitung stetig sind und g also total differenzierbar ist), daß jede Funktion g der obigen Form (mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$) Lösung der Aufgabe ist.

Bemerkung:
Es gilt

$$g(z) = i(x^2 + 2iyx - y^2) + ie^x(\cos y + i \sin y) + c = i(x + iy)^2 + ie^x e^{iy} + c =$$

$$iz^2 + ie^{x+iy} + c = i(z^2 + e^z) + c.$$

Aufgabe 2 (1+2 Punkte)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter gelte $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß f konstant ist.

Lösung

a)

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

b)

Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Gauß-Klammer mit $[x] := \max\{\, n \in \mathbb{Z} : n \leq x \,\}$.

Offenbar gilt $f(z) = f(z + n + im)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

Daher gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$ $f(z) = f(x+iy) = f(x - [x] + i(y - [y])$, wobei $x := \operatorname{Re} z$ und $y := \operatorname{Im} z$.

Wegen $x - [x], y - [y] \in [0,1]$ erhalten wir $f(\mathbb{C}) = f([0,1] + i[0,1])$. Weil $[0,1] + i[0,1]$ kompakt ist, ist $f(\mathbb{C}) = f([0,1] + i[0,1])$ kompakt; also ist f beschränkt. Nach dem Satz von Liouville folgt, daß f konstant ist.

Bemerkung:

Weil in $\mathbb{C}$ nichtleere kompakte Mengen nicht offen sein können, kann man alternativ aus der Kompaktheit von $f(\mathbb{C})$ mit dem Satz von der Gebietstreue schließen, daß f konstant ist.

Aufgabe 3 (1+1+3 Punkte)

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial U_2(1)} \frac{1-\cosh z}{z^2}\,dz.$ *Hinweis:* $\cosh z := \dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ für $z \in \mathbb{C}$.

b) $\displaystyle\int_{\partial U_1(\pi)} \frac{\sin z}{(z-\pi)^{36}}\,dz.$

c) $\displaystyle\int_{\partial U_8(0)} \frac{1+z^2}{e^z-1}\,dz.$

Lösung

a)

Der Integrand ist offenbar holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Im Punkt 0 hat der Nenner eine doppelte Nullstelle. Wegen $(1-\cosh z)_{|z=0} = 0$ und $(1-\cosh z)'_{|z=0} = \sinh 0 = 0$ hat der Zähler in 0 eine Nullstelle, deren Ordnung mindestens 2 ist. Also hat der Integrand in 0 eine hebbare Singularität. Das gesuchte Kurvenintegral stimmt also mit einem Kurvenintegral einer ganzen Funktion längs einer geschlossenen Kurve überein. Nach dem Cauchyschen Integralsatz erhalten wir $\displaystyle\int_{\partial U_2(1)} \frac{1-\cosh z}{z^2}\,dz = 0.$

b)

Wegen $\sin \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel

$$\sin^{(35)}(\pi) = \frac{35!}{2\pi i}\int_{\partial U_1(\pi)} \frac{\sin z}{(z-\pi)^{36}}\,dz.$$

Es ist $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin''' = -\cos$, $\sin'''' = \sin$, $\ldots$, $\sin^{(35)} = -\cos$.

Also gilt $\displaystyle\int_{\partial U_1(\pi)} \frac{\sin z}{(z-\pi)^{36}}\,dz = \frac{2\pi i}{35!}(-\cos\pi) = \frac{2\pi i}{35!}.$

c)

$D := U_9(0)$ ist ein Elementargebiet. Für alle $z \in D$ gilt

$$e^z - 1 = 0 \iff e^z = 1 \iff z \in (2\pi i\mathbb{Z}) \cap D = \{-2\pi i, 0, 2\pi i\}.$$

Also ist der Integrand $f(z) := \dfrac{1+z^2}{e^z-1}$ holomorph auf $D \setminus \{-2\pi i, 0, 2\pi i\}$ und nach dem Residuensatz folgt $\displaystyle\int_{\partial U_8(0)} \frac{1+z^2}{e^z-1}\,dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f;-2\pi i) + \operatorname{Res}(f;0) + \operatorname{Res}(f;2\pi i)).$

Für $a \in \{-2\pi i, 0, 2\pi i\}$ gilt $(e^z-1)_{|z=a} = 0$ und $(e^z-1)'_{|z=a} = e^a = 1$. Gemäß den Formeln zum Berechnen der Residuen (Satz 7.17 iii) erhalten wir $\operatorname{Res}(f;\pm 2\pi i) = 1 + (\pm 2\pi i)^2 = 1 - 4\pi^2$ und $\operatorname{Res}(f;0) = 1$. Insgesamt folgt $\displaystyle\int_{\partial U_8(0)} \frac{1+z^2}{e^z-1}\,dz = 2\pi i(3-8\pi^2).$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Wert des folgenden uneigentlichen Integrals:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 - 3t + 5}{(t^2+1)^2}\, dt.$$

Lösung

Wir setzen $P(x) := x^2 - 3x + 5$, $Q(x) := (x^2+1)^2$, wobei $x \in \mathbb{C}$ und $f := \dfrac{P}{Q}$ auf $\mathbb{C} \setminus N(Q)$.

Q hat offenbar keine reellen Nullstellen, es ist $N(Q) = \{i, -i\}$ und insbesondere $N(Q) \cap \mathbb{H} = \{i\}$. Weiter gilt $\mathrm{Grad} Q = 4 \geq 2 + 2 = \mathrm{Grad} P + 2$.

Also folgt mit Satz 7.29 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 - 3t + 5}{(t^2+1)^2}\, dt = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i)$.

Weiter gilt $Q(x) = (x+i)^2(x-i)^2$ und $P(i) \neq 0$, also hat f in i eine doppelte Polstelle.

Gemäß den Formeln zum Berechnen der Residuen (Satz 7.17 ii) erhalten wir

$$\mathrm{Res}(f; i) = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}_{|z=i} (z-i)^2 f(z) = \left(\frac{z^2 - 3z + 5}{(z+i)^2}\right)'_{|z=i} =$$

$$\left(\frac{(2z-3)(z+i)^2 - (z^2 - 3z + 5) \cdot 2(z+i)}{(z+i)^4}\right)_{|z=i} = \frac{-3i}{2}.$$

Insgesamt folgt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 - 3t + 5}{(t^2+1)^2}\, dt = 2\pi i \frac{-3i}{2} = 3\pi$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Entscheiden Sie (ohne Begründung) durch entsprechendes Ankreuzen, welche der folgenden Aussagen richtig, welche falsch sind.
(pro richtiger Antwort $+1/2$ Punkt, pro falscher Antwort $-1/2$ Punkt; Enthaltung möglich; Minimalgesamtpunktzahl 0)

a) Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f \cdot g \equiv 0$. Dann ist f oder g konstant.

Lösung: Richtig. (Gemäß Satz 6.6 folgt sogar $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$.)

b) Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f \cdot g \equiv 1$. Dann ist f oder g konstant.

Lösung: Falsch. ($f(z) := e^z$, $g(z) := e^{-z}$ für $z \in \mathbb{C}$ ist ein Gegenbeispiel.)

c) Die Möbiustransformationen $\dfrac{z-2}{3z-4}$ und $\dfrac{-4z+2}{-3z+1}$ sind zueinander invers.

Lösung: Richtig. (Es gilt $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & +2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E$ und die Aussage folgt gemäß Satz 3.9.)

d) Es gibt eine konforme Abbildung $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit $f(1/2) = i/4$.

Lösung: Richtig. (Gemäß Lemma 6.18 gibt es konforme Abbildungen $\phi_{1/2} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ und $\phi_{i/4} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit $\phi_{1/2}(1/2) = 0$ und $\phi_{i/4}(0) = i/4$. $\phi_{i/4} \circ \phi_{1/2}$ leistet das Gewünschte.)

e) Die Menge $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_1(n)$ ist ein Elementargebiet.

Lösung: Richtig. Für jedes feste $N \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup_{n=1}^{N} U_1(n)$ ein Elementargebiet, was man induktiv mit Satz 4.33 leicht einsieht. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_1(n)$ ist also die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Elementargebieten, also gemäß Satz 4.34 ein Elementargebiet.)

f) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Bild} f = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.
Hinweis: $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{\, x + iy : \ x, y \in \mathbb{Q} \,\}$.

Lösung: Falsch. (Nach dem Satz von der Gebietstreue wäre dann $\operatorname{Bild} f = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ offen, dies ist aber offensichtlich falsch.)

g) Wenn $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann ist die Potenzreihenentwicklung um 1 von f nicht konvergent im Punkt i.

Lösung: Falsch. (Jede ganze Funktion, insbesondere die Nullfunktion, ist ein Gegenbeispiel.)

h) Es gibt eine auf $\mathbb{C}_-$ holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{e^n}) = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Richtig. ($f := \operatorname{Log} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_-)$ leistet das Gewünschte.)

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Sei $r > 0$. Weiter seien $f, g : \overline{U_r(0)} \to \mathbb{C}$ stetig und nullstellenfrei. Außerdem seien f und g auf $U_r(0)$ holomorph und es gelte $|f(z)| = |g(z)|$ für alle $z \in \partial U_r(0)$.
Zeigen Sie, daß es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gibt so, daß $f = \lambda g$ gilt.

Lösung
Die stetige Funktion $|h| : \overline{U_r(0)} \to \mathbb{C}$, wobei $h := {}^{f}/_{g}$, nimmt auf dem Kompaktum $\overline{U_r(0)}$ ihr Maximum an. Weiter gilt $|h| \equiv 1$ auf $\partial U_r(0)$ und $h \in \mathcal{O}(U_r(0))$.

Wir zeigen, daß h konstant ist. Angenommen nicht, dann folgt nach dem Maximumprinzip, daß $|h(z)| < 1$ für alle $z \in U_r(0)$ gilt (andernfalls gibt es $a \in U_r(0)$ mit $f(a) = \max|h|(\overline{U_r(0)})$, was dem Maximumprinzip wiederspricht). Weiter ist dann auch ${}^{1}/_{h}$ nicht konstant und mit der gleichen Argumentation wie eben folgt $|({}^{1}/_{h})(z)| < 1$ für alle $z \in U_r(0)$. Also gilt für alle $z \in U_r(0)$ $1 < |h(z)| < 1$. ↯

Also ist h konstant. Offenbar leistet dann $\lambda := h(r)$ das Gewünschte.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 1$.
Zeigen Sie, daß die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der rechten Halbebene $\{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$ genau eine Lösung hat.
Zeigen Sie außerdem, daß diese Lösung reell ist.

Lösung
Wir bezeichnen die rechte Halbebene mit $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} := \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \,\}$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ setzen wir $f(z) := z - \lambda$, $g(z) := e^{-z}$ und $h := f + g$. Für alle $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ gilt dann $e^{-z} + z = \lambda \iff h(z) = 0$.

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt $|g(iy)| = |e^{-iy}| = 1 < \lambda = |\operatorname{Re}(iy - \lambda)| \leq |iy - \lambda| = |f(iy)|$.

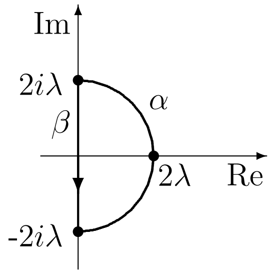
Für alle $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ gilt $|g(z)| = |e^{-(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)}| = e^{-\operatorname{Re} z} < e^0 = 1$.

Für alle $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ mit $|z| \geq 2\lambda$ gilt $|z - \lambda| \geq |z| - |\lambda| \geq 2\lambda - \lambda = \lambda > 1$. Für solche z gilt also $|g(z)| < |f(z)|$ und damit $|h(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$.

Insbesondere befinden sich alle in $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ liegenden Nullstellen von h in $U_{2\lambda}(0)$.

Auf dem Kompaktum $\overline{U_{3\lambda}(0)}$ haben die ganzen Funktionen f und $f+g$ nur endlich viele Nullstellen (weil sonst $N(f)$ und $N(f+g)$ nicht diskret in $\mathbb{C}$ wären). Insbesondere haben f und $f + g$ nur endlich viele Nullstellen im Elementargebiet $D := U_{3\lambda}(0)$.

Wir definieren $\alpha : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}$ und $\beta : [-2\lambda, 2\lambda] \to \mathbb{C}$ durch $\alpha(t) := 2\lambda e^{it}$ bzw. $\beta(t) = -it$. Weiter setzen wir $\gamma := \alpha \oplus \beta$, wobei wir die Zusammensetzung von solchen Kurven wie in den entsprechenden Musterlösungen zu den Übungsblättern verstehen.



Offenbar verläuft dann γ in D, es gilt $\operatorname{Int}(\gamma) = U_{2\lambda(0)} \cap \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ und jeder Punkt im Innern wird einmal umlaufen. Weiter gilt $\operatorname{Bild} \gamma = i[-2\lambda, 2\lambda] \cup (\partial U_{2\lambda(0)} \cap \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0})$ und wir haben bereits gesehen, daß auf $\operatorname{Bild} \gamma$ $|g| < |f|$ gilt. Nach dem Satz von Rouché haben f und $h = f + g$ also in $U_{2\lambda(0)} \cap \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ gleich viele Nullstellen. f hat dort offenbar genau die einfache Nullstelle λ.

Wir schließen, daß h in $U_{2\lambda(0)} \cap \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$, und also auch in $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$, genau eine Nullstelle hat.

Diese Nullstelle ist reell: Angenommen es gibt $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ mit $h(z) = 0$ und $z \notin \mathbb{R}$. Dann gilt $\overline{z} \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$, $\overline{z} \neq z$ und $h(\overline{z}) = e^{-\overline{z}} + \overline{z} - \lambda = \overline{e^{-z} + z - \lambda} = \overline{h(z)} = 0$. Dann hat h in $\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ also mindestens zwei Nullstellen. $\lightning$

Alternative Lösung zu Aufgabe 7
Mit $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$ gilt:

$$e^{-z} + z = \lambda \iff$$

$$e^{-x}(\cos y - i \sin y) + x + iy - \lambda = 0 \iff$$

$$e^{-x} \cos y + x - \lambda + i(-e^{-x} \sin y + y) = 0 \iff$$

$$\big(e^{-x} \cos y + x - \lambda \text{ und } - e^{-x} \sin y + y = 0\big).$$

Für $z \in \mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0}$ gilt $x > 0$ und dann gilt $0 < e^{-x} < 1$. Damit folgt $|e^{-x} \sin y| \leq |\sin y| \leq |y|$ und Gleichheit kann bei der letzten Abschätzung nur gelten falls $y = 0$. Wir erhalten

$$-e^{-x} \sin y + y = 0 \iff y = 0,$$

weshalb $e^{-z} + z = \lambda$ insbesondere nur reelle Lösungen haben kann.

Es bleibt zu zeigen, daß $f(x) := e^{-x} + x - \lambda$ (wobei $x \in \mathbb{R}$) genau eine positive Nullstelle besitzt. Es gilt $f(0) = 1 - \lambda < 0$ nach Voraussetzung und $f(\lambda) = e^{-\lambda} > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz hat die stetige Funktion f also eine Nullstelle in $(0, \infty)$. Außerdem ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = -e^{x} + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Auf $(0, \infty)$ gilt also $f' > 0$, also ist f dort streng monoton wachsend. Also besitzt f genau eine positive Nullstelle.