Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang

WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
10. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 15.1.2010, 12.30 Uhr

K 37.

(a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ differenzierbar. Man zeige: ist $f'(a) \neq f'(b)$, so gibt es zu jedem Wert η zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \eta$.
Hinweis: man betrachte zunächst den Fall $f'(a) < 0 = \eta < f'(b)$.

(b) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei stetig auf (a,b) und auf den Intervallen $(a, x_0), (x_0, b)$ differenzierbar ($x_0 \in (a,b)$ fest). Ferner existiere $\lim_{x\to x_0} f'(x)$. Beweisen Sie: f ist in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$.

K 38. Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale, indem Sie zunächst die Integrierbarkeit des jeweiligen Integranden nachweisen und dann eine Stammfunktion finden.

(a) $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\, dx \qquad (k \in \mathbb{Z})$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2}\, dx \qquad (a > 0)$

39. Zeigen Sie, dass die Cosinus-Funktion auf dem Intervall $[0,\pi]$ streng monoton fallend ist und den Wertebereich $[-1,1]$ besitzt. Für welche $x \in [-1,1]$ ist die Umkehrfunktion $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ differenzierbar? Geben Sie dort die Ableitung an.

40. Es soll der so genannte hyperbolische Cosinus untersucht werden, also

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von cosh.

(b) Zeigen Sie, dass cosh auf dem Intervall $[0,\infty)$ streng monoton wachsend ist und den Wertebereich $[1,\infty)$ besitzt.

(c) Für welche $x \in [1,\infty)$ ist die Umkehrfunktion $\operatorname{Arcosh} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ differenzierbar? Geben Sie dort die Ableitung an.

(d) Skizzieren Sie die Schaubilder von cosh und Arcosh.

(e) Zeigen Sie $\operatorname{Arcosh} x = \log\big(x + \sqrt{x^2-1}\big)$ für alle $x \geq 1$.