

## Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)

### 12. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 29.1.2010, 12.30 Uhr

#### K 45.

(a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 5x + 1} dx.$$

(b) Beweisen Sie zunächst die Formel  $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$  ( $x \in (-\pi, \pi)$ ) und berechnen Sie mit ihrer Hilfe das folgende unbestimmte Integral mittels der Substitution  $x = 2 \arctan t$ :

$$\int \frac{dx}{1 + 3 \cos x}$$

auf  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

#### K 46.

(a) Beweisen Sie das Dirichlet'sche Kriterium:  $f, g$  seien Funktionen in  $C^1[1, \infty)$  und ferner gelte:

(i)  $f$  besitze eine beschränkte Stammfunktion auf  $[1, \infty)$ .

(ii)  $g$  sei monoton auf  $[1, \infty)$  und  $g(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ .

Zeigen Sie: das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty fg dx$  ist konvergent.

(b) Beweisen Sie die Konvergenz von

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^s} dx \quad (s > 0), \quad \int_1^\infty \cos(x^\alpha) dx \quad (\alpha > 1).$$

47. Untersuchen Sie jeweils, ob die unten angegebenen Funktionenfolgen  $(f_n)$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  gleichmäßig konvergieren, und stellen Sie fest, ob  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$  existiert. Berechnen Sie gegebenenfalls diesen Grenzwert.

(a)  $f_n(x) = \cos(nx)$

(b)  $f_n(x) = n \sin(x/n)$

48. Beweisen Sie, dass  $\sin 1$  und  $\cos 1$  irrational sind. Hinweis: Satz von Taylor.