Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang

WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
15. Übungsblatt (Ferienübungsblatt)

Zur weiteren Einübung des Stoffes, keine Abgabe

57. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und (a_n) eine Folge mit $a_n \in [a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie:

$$f(\limsup_{n\to\infty} a_n) \le \limsup_{n\to\infty} f(a_n).$$

58. Die Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Beweisen Sie: es gibt ein $x \in (a,b)$ derart, dass

$$f'(x)(g(b) - g(x)) = (f(x) - f(a))g'(x).$$

Hinweis: Satz von Rolle.

59. Es sei $p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie: Es gibt reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_r$ mit $p(x_j) = 0$ und $\rho_1, \ldots, \rho_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{\rho_1} \ldots (x - x_r)^{\rho_r}(x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1} \ldots (x^2 + A_s x + B_s)^{\sigma_s} \quad (x \in \mathbb{R})$$

gilt, wobei die Polynome $(x^2 + A_j x + B_j), j = 1, \ldots, s$ untereinander verschieden sind und keine reellen Nullstellen besitzen. Hinweis: Ist z eine Nullstelle von p, so ist $\overline{z}$ ebenfalls eine Nullstelle von p. Benutzen Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

60. Der Satz über die *Partialbruchzerlegung* lautet folgendermaßen: es seien p, q reelle Polynome, wobei der Grad von q echt größer sei als der Grad von p. Ferner sei

$$q(x) = a_n(x - x_1)^{\rho_1} \ldots (x - x_r)^{\rho_r}(x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1} \ldots (x^2 + A_s x + B_s)^{\sigma_s} \quad (x \in \mathbb{R})$$

gemäß Aufgabe 59. Dann besitzt die gebrochenrationale Funktion $r(x) := p(x)/q(x)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} r(x) &= \sum_{j=1}^{r} \left[\frac{a_{j1}}{x - x_j} + \frac{a_{j2}}{(x - x_j)^2} + \ldots + \frac{a_{j\rho_j}}{(x - x_j)^{\rho_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{\alpha_{i1} x + \beta_{i1}}{x^2 + A_i x + B_i} + \ldots + \frac{\alpha_{i\sigma_i} x + \beta_{i\sigma_i}}{(x^2 + A_i x + B_i)^{\sigma_i}} \right] \quad (x \in \mathbb{R}, x \ne x_j, j = 1, \ldots, r). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden gebrochenrationalen Funktionen:

(a) $\frac{x^2+1}{x^5+2x^4+2x^3+x^2}$

(b) $\frac{x+2}{x^6+x^4-x^2-1}$

BITTE WENDEN

61. Verifizieren Sie folgenden Formeln der unbestimmten Integration. Hierbei sei vorausgesetzt, dass das Polynom $x^2 + ax + b$ keine reellen Nullstellen besitzt.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+ax+b} &= \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \arctan \frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}} \\
\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^m} &= \frac{2x+a}{(m-1)(4b-a^2)(x^2+ax+b)^{m-1}} + \\
&\quad \frac{2(2m-3)}{(m-1)(4b-a^2)} \int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^{m-1}} \quad (m \geq 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b} &= \frac{1}{2} \log(x^2+ax+b) + (\beta - \alpha a/2) \int \frac{dx}{x^2+ax+b} \\
\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^m} &= -\frac{\alpha}{2(m-1)(x^2+ax+b)^{m-1}} \\
&\quad +(\beta - \alpha a/2) \int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^m} \quad (m \geq 2)
\end{aligned}$$

Eräutern Sie den Zusammenhang mit der Partialbruchzerlegung.

62. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx, \quad \int_3^4 \frac{-2x^2+x-3}{(x+1)(x-1)(x-2)} dx, \quad \int_{9/8}^{4/3} \sqrt{\frac{x}{x-1}} dx, \quad \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

63.

(a) Zeigen Sie: $\int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} dt = \pi$ (Hinweis: Aufgabe 51).

(b) Es sei

$$g(t) := \frac{2}{t} - \frac{1}{\sin(t/2)} \quad (t \in (0, \pi]), \quad g(0) = 0.$$

Zeigen Sie, dass $g \in R[0, \pi]$ gilt.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

gilt (Hinweis: Satz von Riemann-Lebesgue).

(d) Zeigen Sie: $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (Hinweis: Aufgabenteil (c)).

WIR WÜNSCHEN IHNEN EINE ERHOLSAME VORLESUNGSFREIE ZEIT