Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang

WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
2. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 6.11.2009, 12.30 Uhr

K 5.

(a) Zeigen Sie: $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(b) Zeigen Sie: es gilt $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis:* Bernoulli-Ungleichung.

(c) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}$ für $n \in \mathbb{N}$.

6. Zeigen Sie

(a) Sind X, Y abzählbare Mengen, so ist
$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$
ebenfalls abzählbar (Hinweis: ähnlich wie $\mathbb{Q}$).

(b) Sind $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar viele abzählbare Mengen, dann ist
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \{a : \exists n \in \mathbb{N} : a \in A_n\}$$
ebenfalls abzählbar.

(c) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit endlich vielen Elementen ist abzählbar.

K 7. Zeigen Sie, daß diese Folgen konvergieren, und berechnen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n} - n$

(b) $b_n = \frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}$

(c) $c_n = 2\sqrt{n}\,(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

(d) $d_n = \sqrt[3]{n^3 + 6n^2} - n$

8.

(a) Es sei (a_n) eine Nullfolge. Zeigen Sie:
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$
Hinweis: Fixieren Sie $\varepsilon > 0$, wählen Sie $m \in \mathbb{N}$ geeignet, machen Sie die Zerlegung
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} a_k$$
und wählen Sie dann n_0 geeignet.

(b) Zeigen Sie: Aus $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ folgt $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \to a \quad (n \to \infty)$.