Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang

WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
5. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 27.11.2009, 12.30 Uhr

17. Welche der folgenden Aussagen sind wahr (Beweis oder Gegenbeispiel)?

(a) Es sei $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Falls $a_n - b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

K 18.

(a) Zeigen Sie, daß folgende Reihe konvergiert und berechnen Sie ihren Wert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n + 1}{4^n}.$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n!}$ $\quad (\alpha \in \mathbb{Q})$.

K 19. Untersuchen Sie die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz:

(a) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n!}$;

(b) $a_n = \dfrac{n+4}{n^2 - 3n + 1}$;

(c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 + 7}$;

(d) $a_n = \dfrac{(1 + (-1)^n)^n n^4}{3^n}$;

(e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$;

(f) $a_n = \dfrac{n + (-3)^n}{3^n n}$;

(g) $a_n = \left(\dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 2}\right)^{n^3}$;

(h) $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

20. Geben Sie ein Beispiel für eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ an, deren Teilsummen $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ beschränkt sind und deren Glieder a_n gegen Null konvergieren.