

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)

5. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 27.11.2009, 12.30 Uhr

17. Welche der folgenden Aussagen sind wahr (Beweis oder Gegenbeispiel)?

- (a) Es sei $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (b) Falls $a_n - b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (c) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

K 18.

(a) Zeigen Sie, daß folgende Reihe konvergiert und berechnen Sie ihren Wert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n + 1}{4^n}.$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n!}$ ($\alpha \in \mathbb{Q}$).

K 19. Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz:

- (a) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n!};$
- (b) $a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1};$
- (c) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+7};$
- (d) $a_n = \frac{(1+(-1)^n)n^4}{3^n};$
- (e) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}};$
- (f) $a_n = \frac{n+(-3)^n}{3^n n};$
- (g) $a_n = \left(\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+2}\right)^{n^3};$
- (h) $a_n = (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$

20. Geben Sie ein Beispiel für eine divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ an, deren Teilsummen $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$ beschränkt sind und deren Glieder a_n gegen Null konvergieren.