Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang

WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
6. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 4.12.2009, 12.30 Uhr

K 21. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Potenzreihen konvergieren (beachten Sie insbesondere die Randpunkte des Konvergenzintervalls):

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}\, x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\, x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-1)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)}x^{2n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x-2)^{n^2}$

22. Welche Funktionen werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+1)^{2n+2}$

23. Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

(b) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

K 24. Es seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen und $\sigma_0 := 0$, $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Ähnlich wie im Tutorium wird die (Abelsche) partielle Summationsformel gezeigt:

$$a_m b_m + \ldots a_n b_n = \sum_{k=m}^{n-1} \sigma_k(b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n - \sigma_{m-1} b_m. \quad (*)$$

Im Folgenden dürfen Sie (*) benutzen.

(a) (a_n) sei so, dass (σ_n) *beschränkt* ist. Ferner sei (b_n) eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen. Beweisen Sie: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ist konvergent und es gilt ferner

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq b_1 \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sigma_n|.$$

Hinweis: verwenden Sie (*), das Cauchykriterium und achten Sie auf Teleskopsummen.

(b) (b_n) sei wiederum eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen. Zusätzlich sei nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergent*. Zeigen Sie: die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

hat den Konvergenzradius 1, konvergiert für $z = -1$ und divergiert für $z = 1$.