

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)

6. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 4.12.2009, 12.30 Uhr

K 21. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Potenzreihen konvergieren (beachten Sie insbesondere die Randpunkte des Konvergenzintervalls):

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n \\ \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-1)^n & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n \\ \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} x^{2n} & \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-2)^{n^2} \end{array}$$

22. Welche Funktionen werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} x^n \\ \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+1)^{2n+2} \end{array}$$

23. Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \\ \text{(b)} \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \end{array}$$

K 24. Es seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen und $\sigma_0 := 0, \sigma_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Ähnlich wie im Tutorium wird die (Abelsche) partielle Summationsformel gezeigt:

$$a_m b_m + \dots + a_n b_n = \sum_{k=m}^{n-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n - \sigma_{m-1} b_m. \quad (*)$$

Im Folgenden dürfen Sie (*) benutzen.

(a) (a_n) sei so, dass (σ_n) *beschränkt* ist. Ferner sei (b_n) eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen. Beweisen Sie: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ist konvergent und es gilt ferner

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right| \leq b_1 \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sigma_n|.$$

Hinweis: verwenden Sie (*), das Cauchy Kriterium und achten Sie auf Teleskopsummen.

(b) (b_n) sei wiederum eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen. Zusätzlich sei nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergent*. Zeigen Sie: die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

hat den Konvergenzradius 1, konvergiert für $z = -1$ und divergiert für $z = 1$.