Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang

WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
8. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 18.12.2009, 12.30 Uhr

K 29. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$. Beweisen Sie für $f \in C[a, b]$ die folgenden Aussagen:

(a) Gilt $f(x) \in [a, b]$ für alle $x \in [a, b]$, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

(b) Gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist die Funktion $1/f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

30. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $p(x) = x^{13} + a_{12}x^{12} + \ldots + a_1x + a_0$, mit $a_0, \ldots, a_{12} \in \mathbb{R}$, so hat die Gleichung $p(x) = 13$ mindestens eine Lösung.

(b) Gilt für die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \lim_{\text{x}\to\infty} \text{f(x)} = 0$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \le |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

31.

(a) Es sei $a > 0$, und die Folgen $(x_n)_{n\ge0}$ und $(y_n)_{n\ge1}$ seien definiert durch

$$x_0 := a\,, \qquad x_n := \sqrt{x_{n-1}}\,, \quad y_n := 2^n(x_n - 1) \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Zeigen Sie, dass dann $y_n \to \log a$ für $n \to \infty$ gilt.

(b) Beweisen Sie für $x, y > 0$ die Abschätzung

$$\frac{\log x + \log y}{2} \le \log \frac{x + y}{2}\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\log x < x - 1$ für alle $x > 0$ mit $x \ne 1$ gilt.

K 32. Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$

(b) $\lim_{x\to0+0} x^\beta \log x$ $(\beta > 0)$

(c) $\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x}$ $(a > 0)$

(d) $\lim_{x\to0} \frac{a^{(x^2)}-\cos x}{\sin(x^2)}$ $(a > 0)$

Hinweis: Zu (d): Schreiben Sie $\frac{a^{(x^2)}-\cos x}{\sin(x^2)} = \frac{x^2}{\sin(x^2)} \frac{a^{(x^2)}-1-\cos x+1}{x^2}$ und verwenden Sie bereits bekannte Grenzwerte.

- WICHTIGE INFORMATIONEN AUF DER RÜCKSEITE -

WICHTIGE INFORMATIONEN:

Liebe Studierende,

Neben der Erfüllung des Scheinkriteriums, MÜSSEN Sie sich, um einen Übungsschein zu erhalten, elektronisch unter

https://studium.kit.edu

anmelden. Der Eintrag „HM I Übungsschein, Fakultät für Informatik" hat im System die

Nummer 261.

Der Anmeldeschluss ist der

13. FEBRUAR 2010.

Bei der Gelegenheit ist es empfehlenswert, sich bereits für den HM II-Übungsschein (Nummer 263) anzumelden.

WIRD DER ANMELDESCHLUSS NICHT EINGEHALTEN, ERHALTEN SIE KEINEN ÜBUNGSSCHEIN!
Die Dozenten und Übungsleiter haben keinen Zugriff auf das System. Wir haben keine Möglichkeit, etwas für Spätanmelder zu tun. Bitte halten Sie den Anmeldeschluss **unbedingt** ein und machen andere Studierende ebenfalls auf diese Information aufmerksam.