Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang

WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
9. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben (und der Zusatzaufgabe) bis Freitag, 8.1.2010, 12.30 Uhr

33. (Freiwillige Zusatzaufgabe, 8 Punkte) Wir betrachten die folgende Menge $\mathcal{E}$ von Funktionen:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \quad := \quad & \{g : (1,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = x^\alpha (\log x)^\beta e^{P(x)} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ & P(x) := c_1 x^{\gamma_1} + \ldots + c_k x^{\gamma_k}, \text{ mit } c_j \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, \gamma_1 > \ldots > \gamma_k > 0\}\end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von $\mathcal{E}$:

(i) Es gilt $1 \in \mathcal{E}$ und alle $g \in \mathcal{E}$ sind positive Funktionen.

(ii) Für jedes $g \in \mathcal{E}, g \neq 1$ gilt $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

(iii) Sind $f, g \in \mathcal{E}$, so ist auch $f \cdot g$, $\frac{f}{g} \in \mathcal{E}$ sowie $f^\lambda \in \mathcal{E}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und gilt für ein $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ und ein $g \in \mathcal{E}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - cg(x)}{g(x)} = 0,$$

so schreiben wir $f \sim cg \quad (x \to \infty)$ (f ist für $x \to \infty$ asymptotisch gleich cg). Zeigen Sie: gibt es $g \in \mathcal{E}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f \sim cg$, so sind c und g eindeutig bestimmt.

(c) Beweisen Sie die folgende asymptotische Entwicklung für $f(x) := (1+x)^{\frac{1}{x}}$:

$$f(x) - 1 \sim \frac{\log x}{x} \qquad (x \to \infty).$$

Bemerkung: in der o-Notation liest sich die obige Relation als $f(x) = 1 + \frac{\log x}{x} + o(\frac{\log x}{x})$.
Lösungshinweis: Überzeugen Sie sich zunächst, dass $\log(1 + \frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$ gilt und beachten Sie $E(\frac{1}{x}\log(1+x)) = E(\frac{\log x}{x} + \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{x})$.

K 34. Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen und Funktionenreihen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) = \dfrac{x + nx^2 + nx}{1 + nx}$ auf $I_1 = [0,\infty)$ bzw. auf $I_2 = [a,\infty)$ mit einem $a > 0$

(b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ auf $I_1 = [0,1]$ bzw. auf $I_2 = [\epsilon, 1]$ mit einem festen $\epsilon \in (0,1)$

(c) $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ auf $I = \mathbb{R}$

(d) $\sum_{n=1}^\infty e^{-n(1+x+x^2)}$ auf $I = (-\infty, 0)$

K 35. Bestimmen Sie jeweils alle $x \in D$, in denen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

(a) $D = \mathbb{R}\,, \quad f(x) = |x^2 - 4|^3$

(b) $D = (0,\infty)\,, \quad f(x) = x^{(x^x)}$

(c) $D = [0,1]\,, \quad f(x) = (x^2+1)e^{x^5}$

(d) $D = [0,1)\,, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 g(x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

In Teil (d) sei $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und beschränkte Funktion.

- FORTSETZUNG AUF DER RÜCKSEITE -

36. Untersuchen Sie die folgende Funktionenreihe auf gleichmäßige Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

WIR WÜNSCHEN IHNEN EINE FROHE WEIHNACHT UND EIN SCHÖNES NEUES JAHR.
BITTE DENKEN SIE DARAN, SICH FÜR DEN ÜBUNGSSCHEIN ANZUMELDEN!