Höhere Mathematik I

G. Herzog, Ch. Schmoeger

Wintersemester 2017/18

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Reelle Zahlen

Die Grundmenge der Analysis ist die Menge $\mathbb{R}$, die Menge der **reellen Zahlen**. Diese führen wir **axiomatisch** ein, d.h. wir nehmen $\mathbb{R}$ als gegeben an und **fordern** in den folgenden 15 **Axiomen** Eigenschaften von $\mathbb{R}$ aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen.

Körperaxiome: In $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen "+" und "·" gegeben, die jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein $a + b \in \mathbb{R}$ und genau ein $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei gilt:

$(A1)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \ a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz für "+")

$(A5)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz für "·")

$(A2)$ $\exists 0 \in \mathbb{R} \ \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$ (Existenz einer Null)

$(A6)$ $\exists 1 \in \mathbb{R} \ \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$ und $1 \neq 0$ (Existenz einer Eins)

$(A3)$ $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists - a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ (Inverse bzgl. "+")

$(A7)$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$ (Inverse bzgl. "·")

$(A4)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$ (Kommutativgesetz für "+")

$(A8)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz für "·")

$(A9)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

Schreibweisen: Für $a, b \in \mathbb{R}$: $a - b := a + (-b)$ und für $b \neq 0$: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

Alle bekannten Regeln der Grundrechenarten lassen sich aus $(A1) - (A9)$ herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele:

a) Behauptung: Es gibt genau eine Null in $\mathbb{R}$.

Beweis: Es sei $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ und es gelte $\forall a \in \mathbb{R}: \ a + \tilde{0} = a$. Mit $a = 0$ folgt: $0 + \tilde{0} = 0$. Mit $a = \tilde{0}$ in $(A2)$ folgt: $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. Damit ist $0 = 0 + \tilde{0} \overset{(A4)}{=} \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. $\square$

b) Behauptung: $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 0 = 0$.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b := a \cdot 0$. Es gilt $b \overset{(A2)}{=} a \cdot (0 + 0) \overset{(A9)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = b + b$, und damit $0 \overset{(A3)}{=} b + (-b) = (b + b) + (-b) \overset{(A1)}{=} b + (b + (-b)) = b + 0 \overset{(A2)}{=} b$. $\square$

Anordnungsaxiome: In $\mathbb{R}$ ist eine Relation “$\leq$“ gegeben. Für diese gilt:

$(A10)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$ oder $b \leq a$

$(A11)$ $a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$

$(A12)$ $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

$(A13)$ $a \leq b$ und $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c$

$(A14)$ $a \leq b$ und $0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

Schreibweisen: $b \geq a :\iff a \leq b$; $a < b :\iff a \leq b$ und $a \neq b$; $b > a :\iff a < b$.

Aus $(A1) - (A14)$ lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele (Übung)**:**

a) $a < b$ und $0 < c \Rightarrow ac < bc$

b) $a \leq b$ und $c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$

c) $a \leq b$ und $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$

Intervalle: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Wir setzen:

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)

$(a,b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a,b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a,\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(a,\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty,a] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$, $(-\infty,a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$(-\infty,\infty) \coloneqq \mathbb{R}$

Der Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| \coloneqq \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ der **Betrag** von a. Für $a, b \in \mathbb{R}$ heißt die Zahl $|a-b|$ der **Abstand** von a und b.

Beispiele: $|1| = 1, \;\; |-7| = -(-7) = 7.$

Regeln: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|-a| = |a|$ und $|a-b| = |b-a|$

b) $|a| \geq 0$

c) $|a| = 0 \iff a = 0$

d) $|ab| = |a||b|$

e) $\pm a \leq |a|$ (d.h. $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$)

f) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

g) $||a| - |b|| \leq |a-b|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweis:

a) - e) leichte Übung.

f) Fall 1: $a + b \geq 0$. Dann gilt: $|a+b| = a + b \overset{e)}{\leq} |a| + |b|$.

Fall 2: $a + b < 0$. Dann gilt: $|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) \overset{e)}{\leq} |a| + |b|$.

g) Es sei $c := |a| - |b|$. Es gilt

$$|a| = |a - b + b| \overset{f)}{\leq} |a - b| + |b| \Rightarrow c = |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Analog zeigt man

$$-c = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

Also gilt $\pm c \leq |a - b| \Rightarrow |c| \leq |a - b|$.

$\square$

Definition: *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$.*

a) M heißt ***nach oben beschränkt*** $:\Longleftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M:\ x \leq \gamma.$
In diesem Fall heißt γ eine ***obere Schranke*** *(OS) von M.*

b) Ist γ eine obere Schranke von M und gilt $\gamma \leq \delta$ für jede weitere obere Schranke δ von M, so heißt γ das ***Supremum*** *(oder* ***die kleinste obere Schranke****) von M.*

c) M heißt ***nach unten beschränkt*** $:\Longleftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M:\ \gamma \leq x.$
In diesem Fall heißt γ eine ***untere Schranke*** *(US) von M.*

d) Ist γ eine untere Schranke von M und gilt $\gamma \geq \delta$ für jede weitere untere Schranke δ von M, so heißt γ das ***Infimum*** *(oder* ***die größte untere Schranke****) von M.*

Bezeichnung in diesem Fall: $\gamma = \sup M$ bzw. $\gamma = \inf M$.
Aus $(A11)$ folgt: Ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden, so ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ eindeutig bestimmt.
Ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden und gilt $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$, so heißt $\sup M$ das **Maximum** bzw. $\inf M$ das **Minimum** von M und wird mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet.

Beispiele:

a) $M = (1, 2)$. $\sup M = 2 \notin M$, $\inf M = 1 \notin M$. M hat kein Maximum und kein Minimum.

b) $M = (1, 2]$. $\sup M = 2 \in M$, $\max M = 2$.

c) $M = (3, \infty)$. M ist nicht nach oben beschränkt, $3 = \inf M \notin M$.

d) $M = (-\infty, 0]$. M ist nach unten unbeschränkt, $0 = \sup M = \max M$.

e) $M = \emptyset$. Jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke und eine untere Schranke von M.

Vollständigkeitsaxiom:

($A15$) Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach oben beschränkt, so ist $\sup M$ vorhanden.

Satz 1.1: *Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach unten beschränkt, so ist $\inf M$ vorhanden.*

Beweis: In den Übungen. □

Definition: *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. M heißt beschränkt $:\iff$ M ist nach oben und nach unten beschränkt. Äquivalent ist:*

$$\exists c \geq 0 \ \forall x \in M : \ |x| \leq c.$$

Satz 1.2: *Es sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$.*

a) Ist A beschränkt, so ist $\inf A \leq \sup A$.

b) Ist A nach oben bzw. unten beschränkt, so ist B nach oben beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ bzw. nach unten beschränkt und $\inf B \geq \inf A$.

c) A sei nach oben beschränkt und γ eine obere Schranke von A. Dann gilt:

$$\gamma = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x = x(\varepsilon) \in A : x > \gamma - \varepsilon$$

d) A sei nach unten beschränkt und γ eine untere Schranke von A. Dann gilt:

$$\gamma = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x = x(\varepsilon) \in A : x < \gamma + \varepsilon$$

Beweis:

a) $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in A$. Es gilt: $\inf A \leq x$ und $x \leq \sup A \Rightarrow \inf A \leq \sup A$.

b) Es sei $x \in B$. Dann: $x \in A$, also $x \leq \sup A$. Also ist B oben beschränkt und $\sup A$ ist eine obere Schranke von B. Somit ist $\sup B \leq \sup A$. Analog falls A nach unten beschränkt ist.

c) "$\Rightarrow$": Es sei $\gamma := \sup A$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\gamma - \varepsilon < \gamma$. Also ist $\gamma - \varepsilon$ keine obere Schranke von A. Es folgt: $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon$.
"$\Leftarrow$": Es sei $\tilde{\gamma} := \sup A$. Dann ist $\tilde{\gamma} \leq \gamma$. Annahme: $\gamma \neq \tilde{\gamma}$. Dann ist $\tilde{\gamma} < \gamma$, also $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$. Nach Voraussetzung gilt: $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Widerspruch zu $x \leq \tilde{\gamma}$.

d) Analog zu c).

$\square$

Natürliche Zahlen

Definition:

a) *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Induktionsmenge** (IM)*

$$:\iff \begin{cases} (i) & 1 \in A; \\ (ii) & \text{aus } x \in A \text{ folgt stets } x + 1 \in A. \end{cases}$$

Beispiele: $\mathbb{R}$, $[1, \infty)$, $\{1\} \cup [2, \infty)$ *sind Induktionsmengen.*

b) $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x$ *gehört zu jeder IM* $\}$ = *Durchschnitt aller Induktionsmengen.*
Also: $\mathbb{N} \subseteq A$ *für jede Induktionsmenge* A.
Beispiele: $1, 2, 3, 4, 17 \in \mathbb{N}$; $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

Satz 1.3:

a) $\mathbb{N}$ *ist eine Induktionsmenge.*

b) $\mathbb{N}$ *ist nicht nach oben beschränkt.*

c) *Ist* $x \in \mathbb{R}$, *so existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n > x$.

Beweis:

a) Es gilt $1 \in A$ für jede IM A, also $1 \in \mathbb{N}$. Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann ist $x \in A$ für jede IM A, somit $x + 1 \in A$ für jede IM A. Also gilt $x + 1 \in \mathbb{N}$.

b) Annahme: $\mathbb{N}$ ist beschränkt. Nach $(A15)$ existiert $s := \sup \mathbb{N}$. Mit 1.2 folgt: $\exists n \in \mathbb{N} : n > s - 1$. Nun ist $n + 1 > s$. Wegen $n + 1 \in \mathbb{N}$ ist aber $n + 1 \leq s$, ein Widerspruch.

c) Folgt aus 1.3 b).

$\square$

Satz 1.4 (Prinzip der vollständigen Induktion)**:**
Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und ist A eine Induktionsmenge, so ist $A = \mathbb{N}$.

Beweis: Es gilt $A \subseteq \mathbb{N}$ (nach Voraussetzung) und $\mathbb{N} \subseteq A$ (nach Definition), also ist $A = \mathbb{N}$. $\square$

Beweisverfahren durch vollständige Induktion

Es sei $A(n)$ eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Für $A(n)$ gelte:

$$\begin{cases} (i) & A(1) \text{ ist wahr;} \\ (ii) & \text{ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } A(n) \text{ wahr, so ist auch } A(n+1) \text{ wahr.} \end{cases}$$

Dann ist $A(n)$ wahr für **jedes** $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr }\}$. Dann ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und wegen (i), (ii) ist A eine Induktionsmenge. Nach 1.4 ist $A = \mathbb{N}$. $\square$

Beispiel: Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}.$

Beweis: (induktiv)
Induktionsanfang (I.A.): Es gilt $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, $A(1)$ ist also wahr.
Induktionsvoraussetzung (I.V.): Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ sei wahr, es gelte also

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsschluß (I.S.) ($n \curvearrowright n+1$): Es gilt:

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+n+(n+1) &\overset{I.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr. □

Definition: *Wir setzen:*

a) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

b) $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ *(Menge der ganzen Zahlen).*

c) $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ *(Menge der rationalen Zahlen).*

Satz 1.5: *Sind $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y$, so gilt: $\exists r \in \mathbb{Q}$: $x < r < y$.*

Beweis: In den Übungen. □

Einige Definitionen und Formeln

a) **Ganzzahlige Potenzen**.
Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} : a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$, $a^0 := 1$.
Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} : a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

Es gelten die bekannten Rechenregeln: $a^n a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$.

b) **Fakultäten**.

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \ (n \in \mathbb{N}), \quad 0! := 1.$$

c) **Binomialkoeffizienten**. Für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \le n$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Es gilt (nachrechnen):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \le k \le n.$$

d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}. \end{aligned}$$

e) **Binomischer Satz**. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis: In den Übungen. □

f) **Bernoullische Ungleichung**. Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$. Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis: (induktiv)
I.A.: $n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$ ist wahr.
I.V.: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
I.S. ($n \curvearrowright n+1$): Wegen $1 + x \geq 0$ folgt aus der I.V.:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) &= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + nx + x = 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

□

Hilfssatz 1.6: *Für $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$.*

Beweis: In den Übungen. □

Satz 1.7: *Es sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$ mit $x^n = a$. Dieses x heißt **die n-te Wurzel aus** a. Bezeichnung: $x = \sqrt[n]{a}$ ($\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$, $\sqrt[1]{a} = a$).*

Beweis: Existenz: Später in §7. Eindeutigkeit: Es seien $x, y \geq 0$ und $x^n = a = y^n$. Mit 1.6 folgt $x = y$. □

Bemerkungen:

a) Bekannt (Schule): $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Bsp.: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{4} \neq -2$. Die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen: $x = 2$ und $x = -2$.

c)
$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \sqrt{x^2} = |x|.$$

Rationale Exponenten

a) Es sei zunächst $a \geq 0$ und $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{m}{n}$. Wir wollen definieren:

$$(*) \qquad a^r := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Problem: Gilt auch noch $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, gilt dann $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$?
Antwort: Ja (d.h. obige Definition $(*)$ ist sinnvoll).

Beweis: Setze $x := (\sqrt[n]{a})^m$, $y := (\sqrt[q]{a})^p$. Dann gilt $x, y \geq 0$ und $mq = np$, also

$$\begin{aligned} x^q &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mq} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^p = a^p \\ &= \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^q\right)^p = \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^p\right)^q = y^q. \end{aligned}$$

Mit 1.6 folgt $x = y$. □

b) Es seien $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. Wir definieren:

$$a^r := \frac{1}{a^{-r}}.$$

Es gelten die bekannten Rechenregeln: $a^r a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$.

Kapitel 2

Folgen und Konvergenz

Definition: *Es sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$. Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to X$ heißt eine **Folge in** X. Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt a eine **reelle Folge**.*

Schreibweisen: a_n statt $a(n)$ (n-tes Folgenglied)
(a_n) oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_1, a_2, \dots)$ statt a.

Beispiele:

a) $a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.

b) $a_{2n} := 0,\ a_{2n-1} := 1 \quad (n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$.

Bemerkung: Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $a\colon \{p, p+1, p+2, \dots\} \to X$ eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in X. Bezeichnung: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$. Meistens ist $p = 0$ oder $p = 1$.

Definition: *Es sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$.*

*a) X heißt **abzählbar** $:\iff$ Es gibt eine Folge (a_n) in X mit $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.*

*b) X heißt **überabzählbar** $:\iff$ X ist nicht abzählbar.*

Beispiele:

a) Ist X endlich, so ist X abzählbar.

b) $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$.

c) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit

$$a_1 := 0,\ a_2 := 1,\ a_3 := -1,\ a_4 := 2,\ a_5 := -2, \dots$$

also

$$a_1 := 0, \quad a_{2n} := n, \quad a_{2n+1} := -n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

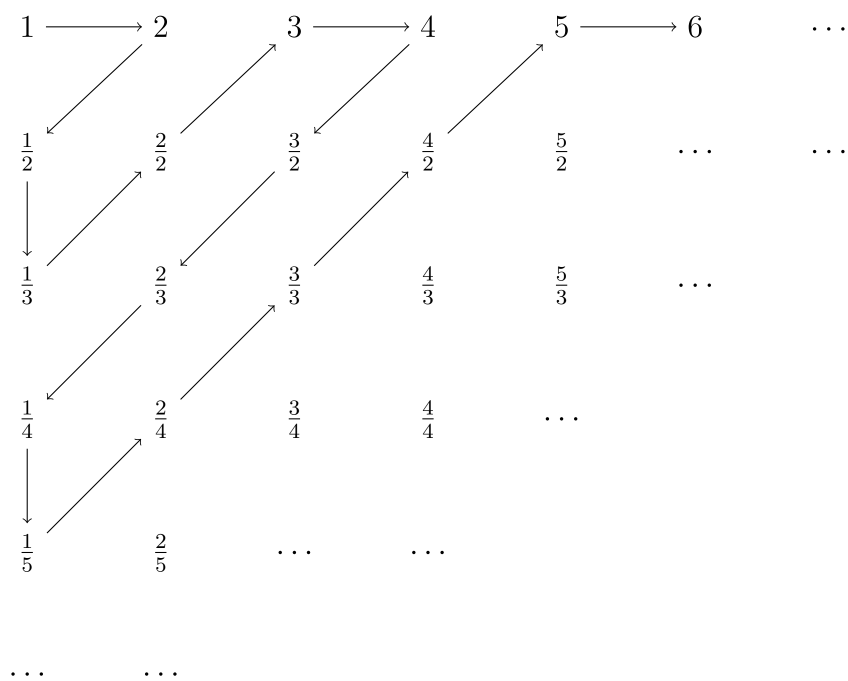

Abbildung 2.1: Zum Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$.

d) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.
Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert:

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Setze $b_1 := 0, b_{2n} := a_n, b_{2n+1} := -a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}.$$

e) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (Beweis in §5).

Vereinbarung: Solange nichts anderes gesagt wird, seien alle vorkommenden Folgen stets Folgen in $\mathbb{R}$. Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nur für Folgen der Form $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ $(p \in \mathbb{Z})$.

Definition: *Es sei* (a_n) *eine Folge und* $M := \{a_1, a_2, \dots\}$.

a) (a_n) *heißt* ***nach oben beschränkt*** $:\iff$ *M ist nach oben beschränkt.*
In diesem Fall:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup M.$$

b) (a_n) *heißt* ***nach unten beschränkt*** $:\iff$ *M ist nach unten beschränkt.*
In diesem Fall:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf M.$$

c) (a_n) *heißt* ***beschränkt*** $:\iff$ *M ist beschränkt. Äquivalent ist:*

$$\exists c \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq c$$

Definition: *Es sei $A(n)$ eine für jedes $n \in \mathbb{N}$ definierte Aussage.*
$A(n)$ gilt ***für fast alle*** *(ffa) $n \in \mathbb{N} :\iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : A(n)$ ist wahr.*

Definition: *Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Das Intervall*

$$U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$$

heißt ***ε-Umgebung von*** *a.*

Definition: *Eine Folge (a_n) heißt* ***konvergent***

$$:\iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ so,} \\ \text{daß für jedes } n \geq n_0 \text{ gilt } : |a_n - a| < \varepsilon. \end{cases}$$

In diesem Fall heißt a ***Grenzwert*** *(GW) oder* ***Limes*** *von (a_n) und man schreibt*

$$a_n \to a \ (n \to \infty) \text{ oder } a_n \to a \text{ oder } \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) ***divergent****. Beachte:*

$$\begin{aligned} a_n \to a \ (n \to \infty) &\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ a_n \in U_\varepsilon(a) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\varepsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Satz 2.1: *Es sei (a_n) konvergent und $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt:*

a) Gilt auch noch $a_n \to b$, so ist $a = b$.

b) (a_n) ist beschränkt.

Beweis:

a) Annahme $a \neq b$. Dann ist $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$. Nun gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \text{ und } \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1 : |a_n - b| < \varepsilon.$$

Es sei $N := \max\{n_0, n_1\}$. Dann gilt:

$$2\varepsilon = |a-b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\varepsilon.$$

Widerspruch. Also ist $a = b$.

b) Es sei $\varepsilon = 1$. Es gilt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 1$. Damit folgt:

$$\forall n \geq n_0 :\ |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

Setze $c := \max\{1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$. Dann: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c$.

□

Beispiele:

a) Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $a_n := c$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ |a_n - c| = 0.$$

Also: $a_n \to c$ $(n \to \infty)$.

b) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Behauptung: $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Es gilt: $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$. Mit 1.3 c) erhalten wir:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Für $n \geq n_0$ ist damit $n > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Somit ist $|a_n - 0| < \varepsilon$ $(n \geq n_0)$. □

c) $a_n \coloneqq (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt $|a_n| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also ist (a_n) beschränkt.
Behauptung: (a_n) ist divergent.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n||1 - (-1)| = 2.$$

Annahme: (a_n) konvergiert. Definiere $a \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n$. Es gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \frac{1}{2}.$$

Für $n \geq n_0$ folgt dann aber:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ein Widerspruch. □

d) $a_n \coloneqq n$ $(n \in \mathbb{N})$. (a_n) ist nicht beschränkt. Nach 2.1 b) ist (a_n) also divergent.

e) $a_n \coloneqq \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Behauptung: $a_n \to 0$.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Es gilt:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Mit 1.3 c) erhalten wir:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Für $n \geq n_0$ gilt damit: $n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, also $|a_n - 0| < \varepsilon$. □

f) $a_n \coloneqq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Behauptung: $a_n \to 0$.

Beweis: Es gilt

$$0 \leq a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

also $|a_n - 0| = a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Beispiel e) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \ \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon, \text{ somit gilt } \forall n \geq n_0 : \ |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Also gilt: $a_n \to 0$. □

Definition: *Es seien* (a_n) *und* (b_n) *Folgen und* $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(a_n) \pm (b_n) \coloneqq (a_n \pm b_n);\ \ \alpha(a_n) \coloneqq (\alpha a_n);\ \ (a_n)(b_n) \coloneqq (a_n b_n).$$

Gilt $b_n \neq 0$ $(n \geq m)$, *so ist die Folge* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$ *definiert.*

Satz 2.2: *Es seien* $(a_n), (b_n), (c_n)$ *und* (α_n) *Folgen und* $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

a) $a_n \to a \iff |a_n - a| \to 0$.

b) Gilt $|a_n - a| \leq \alpha_n$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha_n \to 0$, *so gilt* $a_n \to a$.

c) Es gelte $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$. *Dann gilt:*

- *(i)* $|a_n| \to |a|$;
- *(ii)* $a_n + b_n \to a + b$;
- *(iii)* $\alpha a_n \to \alpha a$;
- *(iv)* $a_n b_n \to ab$;
- *(v) ist* $a \neq 0$, *so existiert ein* $m \in \mathbb{N}$ *mit:*

$$a_n \neq 0\ (n \geq m) \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}.$$

d) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to b$ *und* $a_n \leq b_n$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $a \leq b$.

e) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to a$ *und* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt* $c_n \to a$.

Beispiele:

a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ und $a_n \coloneqq \frac{1}{n^p}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt $n \leq n^p$ $(n \in \mathbb{N})$. Also:

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}\ (n \in \mathbb{N}) \overset{2.2\ e)}{\Longrightarrow} a_n \to 0.$$

b) Es sei $a_n \coloneqq \frac{5n^2+3n+1}{4n^2-n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt: $a_n = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{2.2} \frac{5}{4}$.

Beweis: (von 2.2)

a) Folgt aus der Definition der Konvergenz.

b) Es gilt: $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m: \ |a_n - a| \leq \alpha_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\alpha_n \to 0$ gilt:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1: \ \alpha_n < \varepsilon.$$

Setze $n_0 \coloneqq \max\{m, n_1\}$. Für $n \geq n_0$ gilt nun: $|a_n - a| \leq \alpha_n < \varepsilon$.

c) (i) $\forall n \in \mathbb{N}: \ ||a_n| - |a|| \overset{§1}{\leq} |a_n - a| \overset{a),b)}{\Longrightarrow} |a_n| \to |a|$.

(ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Es gilt: $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_1: \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \forall n \geq n_2: \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setze $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$. Für $n \geq n_0$ erhalten wir:

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iii) Übung.

(iv) Es sei $c_n \coloneqq |a_n b_n - ab|$ $(n \in \mathbb{N})$. Wir zeigen: $c_n \to 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} c_n &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|. \end{aligned}$$

Mit 2.1 b) folgt: $\exists c \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq c$. Damit erhalten wir:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ c_n \leq c|b_n - b| + |b||a_n - a| \eqqcolon \alpha_n.$$

Mit c) (ii), c) (iii) und a) folgt: $\alpha_n \to 0$.
Also: $|c_n - 0| = c_n \leq \alpha_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\alpha_n \to 0$. Mit b) folgt nun $c_n \to 0$.

(v) Setze $\varepsilon \coloneqq \frac{|a|}{2}$. Aus (i) folgt: $|a_n| \to |a|$. Damit gilt:

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m: \ |a_n| \in U_\varepsilon(|a|) = (|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon) = (\frac{|a|}{2}, \frac{3}{2}|a|).$$

Insbesondere ist $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ $(n \geq m)$, also $a_n \neq 0$ $(n \geq m)$. Für $n \geq m$ gilt nun:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} \eqqcolon \alpha_n.$$

Es gilt $\alpha_n \to 0$. Mit b) folgt $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$.

d) Annahme: $b < a$. Setze $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Dann gilt:

$$\forall x \in U_\varepsilon(b)\ \forall y \in U_\varepsilon(a):\ x < y.$$

Weiter gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0:\ b_n \in U_\varepsilon(b),$$
$$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m:\ a_n \leq b_n.$$

Setze $m_0 := \max\{n_0, m\}$. Für $n \geq m_0$ ist $a_n \leq b_n < b + \varepsilon$, also $a_n \notin U_\varepsilon(a)$. Widerspruch.

e) Es gilt: $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m:\ a_n \leq c_n \leq b_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Es existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\forall n \geq n_1:\ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$
$$\forall n \geq n_2:\ a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon.$$

Setze $n_0 := \max\{n_1, n_2, m\}$. Für $n \geq n_0$ gilt nun:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon.$$

Also: $|c_n - a| < \varepsilon$ $(n \geq n_0)$.

$\square$

Definition:

*a) (a_n) heißt **monoton wachsend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq a_{n+1}$.*

*b) (a_n) heißt **streng monoton wachsend** $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n < a_{n+1}$.*

*c) Entsprechend definiert man **monoton fallend** und **streng monoton fallend**.*

*d) (a_n) heißt **[streng] monoton** $:\Longleftrightarrow$ (a_n) ist [streng] monoton wachsend oder [streng] monoton fallend.*

Satz 2.3 (Monotoniekriterium)**:**

a) Die Folge (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

b) *Die Folge* (a_n) *sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist* (a_n) *konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Beweis:

a) Setze $a \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a-\varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$. Also existiert ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a-\varepsilon$. Für $n\geq n_0$ gilt:

$$a-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a+\varepsilon,$$

also $|a_n - a| < \varepsilon$ $(n\geq n_0)$.

b) Zeigt man analog.

□

Beispiel: $a_1 \coloneqq \sqrt[3]{6}$, $a_{n+1} \coloneqq \sqrt[3]{6+a_n}$ $(n\geq 1)$.
Behauptung: $\forall n\in\mathbb{N} : 0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n$.

Beweis: (induktiv)
I.A.: $n=1$.

$$0 < a_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$a_2 = \sqrt[3]{6+a_1} > \sqrt[3]{6} = a_1.$$

I.V.: Es sei $n\in\mathbb{N}$ und $0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n$.
I.S. ($n \curvearrowright n+1$): Es gilt $a_{n+1} = \sqrt[3]{6+a_n} >_{I.V.} 0$. Weiter ist

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{6+a_n} <_{I.V.} \sqrt[3]{6+2} = 2; \quad a_{n+2} = \sqrt[3]{6+a_{n+1}} >_{I.V.} \sqrt[3]{6+a_n} = a_{n+1}.$$

□

Also ist (a_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend. Nach 2.3 ist (a_n) konvergent. Setze $a \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n$. Es gilt $a_n \geq 0$ $(n\in\mathbb{N})$, also $a\geq 0$. Weiter ist

$$a_{n+1}^3 = 6 + a_n \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Mit 2.2 folgt $a^3 = 6 + a \Rightarrow 0 = a^3 - a - 6 = (a-2)(\underbrace{a^2+2a+3}_{\geq 3})$. Also ist $a=2$.

Wichtige Beispiele:
Vorbemerkung: Es seien $x, y \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$: Es ist (vgl. §1)

$$x^p - y^p = (x - y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x - y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1} |x - y|.$$

Beispiel 2.4: Es sei (a_n) eine konvergente Folge in $[0, \infty)$ mit Grenzwert a (bea. $a \geq 0$) und $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

Beweis:
Fall 1: $a = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ 0 \leq a_n < \varepsilon^p$. Daraus folgt:

$$\forall n \geq n_0 :\ 0 \leq \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon.$$

Also gilt: $\sqrt[p]{a_n} \to 0 = \sqrt[p]{a}$.
Fall 2: $a \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - (\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y})^p| = |x^p - y^p| \\ &\geq_{s.o.} \underbrace{y^{p-1}}_{:=c} |x - y| = c|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}|, \quad c > 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \frac{1}{c}|a_n - a| =: \alpha_n$. Es gilt $\alpha_n \to 0$, also $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$. □

Beispiel 2.5: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: (x^n) ist konvergent $\iff$ $x \in (-1, 1]$. In diesem Fall:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Beweis:
Fall 1: $x = 0$. Dann gilt $x^n \to 0$. Fall 2: $x = 1$. Dann gilt $x^n \to 1$.
Fall 3: $x = -1$. Dann ist $(x^n) = ((-1)^n)$ divergent.
Fall 4: $|x| > 1$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $|x| = 1 + \delta$. Damit gilt:

$$|x^n| = |x|^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist (x^n) nicht beschränkt und somit divergent.
Fall 5: $0 < |x| < 1$. Dann ist $\frac{1}{|x|} > 1$ und es gibt ein $\eta > 0$ mit $\frac{1}{|x|} = 1 + \eta$. Damit gilt:

$$\left|\frac{1}{x^n}\right| = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1+\eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist

$$|x^n| \leq \frac{1}{n\eta} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Damit folgt $x^n \to 0$. $\square$

Beispiel 2.6: Es sei $x \in \mathbb{R}$ und

$$s_n := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Fall 1: $x = 1$. Dann ist $s_n = n + 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, (s_n) ist also divergent.
Fall 2: $x \neq 1$. Dann ist

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Aus 2.5 folgt:

$$(s_n) \text{ ist konvergent} \quad \iff \quad |x| < 1.$$

In diesem Fall gilt: $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$.

Beispiel 2.7: Behauptung: Es gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Beweis: Es ist $\sqrt[n]{n} \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Wir zeigen: $a_n \to 0$.
Für jedes $n \geq 2$ gilt:

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (a_n + 1)^n \overset{\S 1}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Es folgt

$$\forall n \geq 2: \ 0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

Wegen $\sqrt{2}/\sqrt{n-1} \to 0$ folgt $a_n \to 0$. $\square$

Beispiel 2.8: Es sei $c > 0$. Behauptung: Es gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$.

Beweis: Fall 1: $c \geq 1$. Dann gilt: $\exists m \in \mathbb{N} : 1 \leq c \leq m$. Daraus folgt:

$$1 \leq c \leq n \ (n \geq m) \ \Rightarrow \ 1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n} \ (n \geq m).$$

Mit 2.7 folgt die Behauptung.
Fall 2: $0 < c < 1$. Dann ist $\frac{1}{c} > 1$. Also gilt

$$\sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} \xrightarrow[Fall 1]{} 1 \quad (n \to \infty).$$

$\square$

Beispiel 2.9: Es sei

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Behauptung: (a_n) und (b_n) sind konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beweis: In der großen Übungen wird gezeigt: $\forall n \in \mathbb{N} : \ 2 \leq a_n < a_{n+1} < 3$. Nach 2.3 ist (a_n) also konvergent; $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.
Weiter ist $b_n > 0$ und $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Also ist (b_n) monoton wachsend.
Für jedes $n > 3$ gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \ldots \cdot n}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Nach 2.3 ist (b_n) konvergent; $b := \lim_{n\to\infty} b_n$.

Weiter gilt für jedes $n \geq 2$:

$$
\begin{aligned}
a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\overset{\S 1}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \\
&= 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{(1-\frac{1}{n})}_{<1} \underbrace{(1-\frac{2}{n})}_{<1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1-\frac{k-1}{n})}_{<1} \\
&\leq 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = b_n.
\end{aligned}
$$

Also gilt $a_n \leq b_n$ $(n \geq 2)$ und damit folgt $a \leq b$.
Weiter sei $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$ (zunächst fest). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq j$ gilt:

$$
\begin{aligned}
a_n &\overset{s.o.}{=} 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1-\frac{k-1}{n}) \\
&\geq 1+1+\sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} \underbrace{(1-\frac{1}{n})}_{\to 1} \underbrace{(1-\frac{2}{n})}_{\to 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1-\frac{k-1}{n})}_{\to 1} \\
&\to 1+1+\sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

Also gilt $a \geq b_j$ für jedes $j \geq 2$. Wegen $b_j \to b$ $(j \to \infty)$ folgt $a \geq b$. $\square$

Definition: *Die gemeinsame Grenzwert der Folgen in 2.9*

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

heißt ***Eulersche Zahl****. ($e \approx 2,718\ldots$).*

Übung: Es gilt: $2 < e < 3$.

Definition: *Es sei (a_n) eine Folge und $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze*

$$b_k := a_{n_k},$$

also $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, b_3 = a_{n_3}, \ldots$.
Dann heißt $(b_k) = (a_{n_k})$ eine ***Teilfolge*** *(TF) von (a_n).*

Beispiele:

a) $(a_2, a_4, a_6, \dots)$ ist eine Teilfolge von (a_n); hier: $n_k = 2k$.

b) $(a_1, a_4, a_9, \dots)$ ist eine Teilfolge von (a_n); hier: $n_k = k^2$.

c) $(a_2, a_6, a_4, a_{10}, a_8, a_{14}, \dots)$ ist keine Teilfolge von (a_n).

Definition: *Es sei (a_n) eine Folge. Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt ein **Häufungswert** (HW) von (a_n), wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) existiert mit $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. Weiter sei*

$$H(a_n) \coloneqq \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \textit{ ist ein Häufungswert von } (a_n)\}.$$

Satz 2.10: *Es gilt:*

$$\alpha \in H(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0 : \ a_n \in U_\varepsilon(\alpha) \textit{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis:
"$\Rightarrow$": Es sei (a_{n_k}) eine Teilfolge mit $a_{n_k} \to \alpha$ und es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$ für $k \geq k_0$.
"$\Leftarrow$": Es gilt:
$\exists n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in U_1(\alpha)$,
$\exists n_2 \in \mathbb{N} : a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ und $n_2 > n_1$,
$\exists n_3 \in \mathbb{N} : a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha)$ und $n_3 > n_2$, etc...
So entsteht eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha)$ $(k \in \mathbb{N})$. Also gilt: $a_{n_k} \to \alpha$. $\square$

Beispiele:

a) $a_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt: $a_{2k} \to 1, a_{2k+1} \to -1$, also $1, -1 \in H(a_n)$. Es sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, daß $1, -1 \notin U_\varepsilon(\alpha)$. Dann gilt $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für kein $n \in \mathbb{N}$. Nach 2.10 ist $\alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \{1, -1\}$.

b) $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so gilt: $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für höchstens endlich viele n, also $\alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \emptyset$.

c) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Es sei (a_n) eine Folge mit $\mathbb{Q} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Nach 1.5 enthält $U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ unendlich viele verschiedene rationale Zahlen. Nach 2.10 folgt $\alpha \in H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \mathbb{R}$.

Folgerung: Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_n) in $\mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$.

Satz 2.11: *Die Folge (a_n) sei konvergent, $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n). Dann gilt:*

$$a_{n_k} \to a \quad (k \to \infty).$$

Insbesondere gilt: $H(a_n) = \{\lim_{n\to\infty} a_n\}$.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a_n \in U_\varepsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also auch $a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$ ffa $k \in \mathbb{N}$. Somit gilt $a_{n_k} \to a$. □

Definition: *Es sei (a_n) eine Folge und $m \in \mathbb{N}$.*
*m heißt **niedrig** (für (a_n)) $:\Longleftrightarrow \quad \forall n \geq m: \ a_n \geq a_m$.*

Bemerkung: Es gilt also:
$m \in \mathbb{N}$ ist nicht niedrig $\Longleftrightarrow \exists n \geq m: \ a_n < a_m \Rightarrow \exists n > m: \ a_n < a_m$.

Hilfssatz 2.12: *Es sei (a_n) eine Folge. Dann enthält (a_n) eine monotone Teilfolge.*

Beweis:
Fall 1: Es existieren höchstens endlich viele niedrige Indizes. Also existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ so, daß jedes $n \geq n_1$ nicht niedrig ist.

n_1 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} < a_{n_1}$,

n_2 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2}$,

etc. . .

Wir erhalten so eine streng monoton fallende Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n).
Fall 2: Es existieren unendlich viele niedrige Indizes $n_1, n_2, n_3 \ldots$; o.B.d.A. sei

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots .$$

n_1 ist niedrig und $n_2 > n_1 \Rightarrow a_{n_2} \geq a_{n_1}$,

n_2 ist niedrig und $n_3 > n_2 \Rightarrow a_{n_3} \geq a_{n_2}$,

etc. . .

Wir erhalten so eine monoton wachsende Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n). $\square$

Satz 2.13 (Bolzano-Weierstraß)**:**
Die Folge (a_n) sei beschränkt. Dann gilt: $H(a_n) \neq \emptyset$, d.h. (a_n) enthält eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Es gilt: $\exists c \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}: \; |a_n| \leq c$. Nach 2.12 enthält (a_n) eine monotone Teilfolge (a_{n_k}). Wegen $|a_{n_k}| \leq c \; (k \in \mathbb{N})$ ist (a_{n_k}) auch beschränkt.
Nach 2.3 ist (a_{n_k}) konvergent. Damit ist $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in H(a_n)$. $\square$

Satz 2.14: *Die Folge (a_n) sei beschränkt (nach 2.13 gilt damit $H(a_n) \neq \emptyset$). Es gilt:*

a) *$H(a_n)$ ist beschränkt.*

b) $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$*; es existieren also* $\max H(a_n)$ *und* $\min H(a_n)$*.*

Beweis:

a) Es gilt: $\exists c \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}: \; |a_n| \leq c$. Es sei $\alpha \in H(a_n)$. Dann existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \to \alpha \; (k \to \infty)$. Es ist $|a_{n_k}| \leq c \; (k \in \mathbb{N})$, also $|\alpha| \leq c$. Somit gilt
$$\forall \alpha \in H(a_n): \; |\alpha| \leq c.$$

b) ohne Beweis.

$\square$

Definition: *Die Folge (a_n) sei beschränkt.*

a) *Die Zahl*
$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \max H(a_n)$$
heißt ***Limes superior*** *oder* ***oberer Limes*** *von (a_n).*

b) *Die Zahl*
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \min H(a_n)$$
heißt ***Limes inferior*** *oder* ***unterer Limes*** *von (a_n).*

Satz 2.15: *Die Folge (a_n) sei beschränkt. Dann gilt:*

a) $\forall \alpha \in H(a_n): \ \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \alpha \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

b) Ist (a_n) konvergent, so ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

c) $\forall \alpha \geq 0: \ \limsup_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \limsup_{n\to\infty} a_n$.

d) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: a) ist klar, b) folgt aus 2.11, c) und d) Übung. □

Vorbemerkung: Die Folge (a_n) sei konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n =: a$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $n, m \geq n_0$ gilt damit:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Folge (a_n) hat also die folgende Eigenschaft:

$$(c) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Äquivalent ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Definition: *Eine Folge (a_n) heißt eine* ***Cauchyfolge*** *(CF)*

$$:\iff (a_n) \text{ hat die Eigenschaft } (c).$$

Konvergente Folgen sind also Cauchyfolgen!

Satz 2.16 (Cauchykriterium)**:** *(a_n) ist konvergent $\iff$ (a_n) ist eine Cauchyfolge.*

Beweis: "⇒": wurde in obiger Vorbemerkung bewiesen.
"⇐": Es gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N : \ |a_n - a_m| < 1.$$

Für $n \geq N$ ist somit

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N| =: c.$$

Also gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq \max\{c, |a_1|, \dots |a_{N-1}|\}.$$

Damit ist (a_n) beschränkt und nach 2.13 hat (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}). Es sei $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : \ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2},$$

und

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}: \ |a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } n_{k_0} \geq n_0.$$

Für jedes $n \geq n_0$ gilt nun

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also gilt $a_n \to a \ (n \to \infty)$. □

Beispiel: $a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Mit Induktion folgt $0 < a_n \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und damit $a_n \geq \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Für $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt daher:

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= \left| \frac{1}{1 + a_{n+k-1}} - \frac{1}{1 - a_{n-1}} \right| = \frac{|a_{n-1} - a_{n+k-1}|}{(1 + a_{n+k-1})(1 + a_{n-1})} \\
&\leq \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2} |a_{n+k-1} - a_{n-1}| = \frac{4}{9} |a_{n+k-1} - a_{n-1}| \\
&\leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |a_{n-k-2} - a_{n-2}| \leq \dots \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_{k+1} - a_1| \\
&\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} (|a_{k+1}| + |a_1|) \leq 2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Wegen $2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \to 0 \ (n \to \infty)$ gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \ \forall n \geq n_0 : \ 2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} < \varepsilon.$$

Wir erhalten:

$$\forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N}: \ |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$$

Also ist (a_n) eine Cauchyfolge und somit konvergent; $a \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n$. Klar ist:

$$a \geq \frac{1}{2} \text{ und } a = \frac{1}{1+a}.$$

Also ist

$$a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ oder } a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Wegen $a \geq \frac{1}{2}$ folgt $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Kapitel 3

Unendliche Reihen

Definition: *Es sei* (a_n) *sei eine Folge.*

a) *Wir setzen*

$$s_n \coloneqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

also $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$. *Die Folge* (s_n) *heißt* ***(unendliche) Reihe*** *und wird mit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *bezeichnet. Es gilt also:*
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist konvergent bzw. divergent* $\iff$ (s_n) *ist konvergent bzw. divergent.*

b) s_n *heißt* n***-te Teilsumme*** *von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) *Ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent, so heißt* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *der* ***Reihenwert*** *und wird ebenfalls mit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *bezeichnet. (***Vorsicht:*** Doppelbedeutung von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*)*

Bemerkung: Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ eine Folge, so definiert man entsprechend

$$s_n = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n \quad (n \geq p)$$

und $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ (meist: $p = 1$ oder $p = 0$).

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nun für Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Diese Sätze und Definitionen gelten entsprechend für Reihen der Form $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ ($p \in \mathbb{Z}$).

Beispiele:

a) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

heißt **geometrische Reihe**.
Hier ist $s_n = 1 + x + \ldots + x^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Nach 2.6 gilt: (s_n) konvergiert $\iff$ $|x| < 1$ und $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$. Also: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert $\iff$ $|x| < 1$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
Es gilt:
$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \ldots + a_n \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1. \end{aligned}$$
Also: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.$$
Nach 2.9 gilt:
$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \to e \quad (n \to \infty).$$
Also: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

d) Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
heißt **harmonische Reihe**. Hier ist $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt:
$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = s_n + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq s_n + \frac{1}{2}.$$
Annahme: (s_n) ist konvergent; $s := \lim_{n\to\infty} s_n$. Mit 2.11 folgt $s_{2n} \to s$ $(n \to \infty)$. Somit gilt
$$s \geq s + \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{2}.$$
Widerspruch. Also: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

Satz 3.1: *Es sei* (a_n) *eine Folge und* $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) ***Monotoniekriterium:*** *Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.*

b) ***Cauchykriterium:*** *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\iff$*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m > n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

d) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Dann ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ konvergent und für $r_m := \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ gilt: $r_m \to 0$ $(m \to \infty)$.

Beweis:

a) Es gilt: $s_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Also ist (s_n) wachsend und beschränkt. Nach 2.3 ist (s_n) konvergent.

b) Für $m > n$ gilt:

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m - (a_1 + \ldots a_n)| \\ &= |a_{n+1} + \ldots + a_m| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k|. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt damit aus 2.16.

c) Es gilt: $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ist (s_n) konvergent, so folgt $a_{n+1} \to 0$.

d) Ohne Beweis.

□

Bemerkung: Ist (a_n) eine Folge und gilt $a_n \not\to 0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Satz 3.2: *Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seien konvergent und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Beweis: Folgt aus 2.2. $\square$

Satz 3.3 (Leibnizkriterium)**:** *Es sei* (b_n) *eine Folge mit:*

a) (b_n) *ist monoton fallend,*

b) $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ *konvergent.*

Beispiel: Aus 3.3 folgt:
Die **alternierende harmonische Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent.

Beweis: (von 3.3) Da (b_n) eine fallende Nullfolge ist gilt: $b_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Wir setzen $a_n \coloneqq (-1)^{n+1}b_n$ und $s_n \coloneqq a_1 + \ldots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{b_{2n+1} - b_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist (s_{2n}) monoton wachsend. Analog zeigt man: (s_{2n-1}) ist monoton fallend.
Weiter gilt:

$$(*) \qquad s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n-1} - b_{2n} \leq s_{2n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_{2n} \overset{(*)}{\leq} s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1$$

Somit sind (s_{2n}) und (s_{2n-1}) beschränkt. Nach 2.3 sind (s_{2n}) und (s_{2n-1}) konvergent; $s \coloneqq \lim_{n\to\infty} s_{2n}$. Mit $(*)$ folgt $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$.
Es sei $\varepsilon > 0$. Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} s_{2n} \in U_\varepsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ s_{2n-1} \in U_\varepsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow s_n \in U_\varepsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$$

Also gilt: $s_n \to s$ $(n \to \infty)$. $\square$

Definition: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt* ***absolut konvergent*** $:\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *ist konvergent.*

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Satz 3.4: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sei absolut konvergent. Dann gilt:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist konvergent,*

b) $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *($\triangle$-Ungleichung für Reihen).*

Beweis:

a) Für $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ gilt:

$$(*) \qquad \underbrace{|\sum_{k=n+1}^{m} a_k|}_{=:\sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|}_{=:\tau_{m,n}}.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung und 3.1 b) gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m > n \geq n_0 : \ \tau_{m,n} < \varepsilon,$$

also mit $(*)$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m > n \geq n_0 : \ \sigma_{m,n} < \varepsilon.$$

Nach 3.1 b) ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

b) Es sei $s_n := a_1 + \ldots + a_n$, $\sigma_n := |a_1| + \ldots + |a_n|$ $(n \in \mathbb{N})$, $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ und $\sigma := \lim_{n\to\infty} \sigma_n$. Es gilt: $|s_n| \to |s|$ $(n \to \infty)$ und $|s_n| \leq \sigma_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Damit folgt $|s| \leq \sigma$.

□

Satz 3.5:

a) ***Majorantenkriterium****: Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

b) ***Minorantenkriterium****: Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.*

Beweis:

a) Es gilt: $\exists j \in \mathbb{N}\ \forall n \geq j$: $|a_n| \leq b_n$. Nun sei $m > n \geq j$. Dann ist

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|}_{=:\sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} b_k}_{=:\tau_{m,n}}.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung und 3.1 b) gilt:

$$\exists n_0 \geq j\ \forall m > n \geq n_0 : \tau_{m,n} < \varepsilon,$$

also

$$\exists n_0 \geq j\ \forall m > n \geq n_0 : \sigma_{m,n} < \varepsilon.$$

Nach 3.1 b) ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

b) Annahme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent. Nach a) ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent. Widerspruch.

$\square$

Beispiele:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, $a_n := \frac{1}{(n+1)^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n| = a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n.$$

Bekannt: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent. Nach 3.5 a) ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergent.

b) Aus Beispiel a) folgt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

c) Sei $\alpha > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$. Wir betrachten $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.
Fall 1: $\alpha \in (0, 1]$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \xRightarrow{3.5\ b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ divergiert.}$$

Fall 2: $\alpha \geq 2$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \xRightarrow{3.5\ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert.}$$

Fall 3: $\alpha \in (1, 2)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert.}$$

Beweis in den Übungen.

Fazit: Ist $\alpha > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$, so gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Bemerkung: Ist später (in §7) die allgemeine Potenz a^x ($a > 0, x \in \mathbb{R}$) eingeführt, so zeigt man analog: Ist $\alpha > 0$, so gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^3+1}$. Es gilt:

$$\left|(-1)^n \frac{n+2}{n^3+1}\right| = \frac{n+2}{n^3+1} \leq \frac{n+2}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \quad (n \geq 2).$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ ist konvergent. Nach 3.5 a) ist $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^3+1}$ absolut konvergent.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Es gilt

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ divergiert. Nach 3.5 b) ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ divergent.

Hilfssatz 3.6: *Die Folge (c_n) sei beschränkt. Dann gilt:*

a) Ist $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$ und $x > \alpha$, so ist $c_n < x$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

b) Ist $\alpha := \liminf_{n\to\infty} c_n$ und $x < \alpha$, so ist $c_n > x$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

c) Ist $c_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\limsup_{n\to\infty} c_n = 0$, so gilt $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Beweis:

c) Es sei $\varepsilon > 0$. Mit a) (für $x = \varepsilon$) folgt: $-\varepsilon < 0 \leq c_n < \varepsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $c_n \in U_\varepsilon(0)$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

a) Annahme: $c_n \geq x$ für unendlich viele n, etwa für $n_1, n_2, n_3, \dots$ mit

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Die Teilfolge (c_{n_k}) ist beschränkt. Nach 2.11 enthält (c_{n_k}) eine konvergente Teilfolge $(c_{n_{k_j}})$. Definiere

$$\beta := \lim_{j \to \infty} c_{n_{k_j}}.$$

Es gilt $c_{n_{k_j}} \geq x$ $(j \in \mathbb{N})$, also ist $\beta \geq x > \alpha$. Auch $(c_{n_{k_j}})$ ist eine Teilfolge von (c_n), also ist $\beta \in H(a_n)$ und somit $\beta \leq \alpha$, Widerspruch.

b) Analog wie a).

$\square$

Satz 3.7 (Wurzelkriterium (WK))**:** *Es sei* (a_n) *eine Folge,* $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Ist (c_n) *unbeschränkt, so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

b) Es sei (c_n) *beschränkt und* $\alpha := \limsup_{n \to \infty} c_n$. *Dann gilt:*

(i) Ist $\alpha < 1$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) Ist $\alpha > 1$, *so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Im Falle $\alpha = 1$ *ist keine allgemeine Aussage möglich.*

Beweis:

a) (c_n) ist unbeschränkt $\Rightarrow c_n \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \not\to 0$. Mit 3.1 c) folgt die Behauptung.

b) (i) Es sei $\alpha < 1$. Wähle ein $x \in (\alpha, 1)$. Nach 3.6 gilt: $c_n \leq x$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also $|a_n| \leq x^n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ konvergiert. Nach 3.5 a) konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(ii) Es sei $\alpha > 1$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, daß $\alpha - \varepsilon > 1$. Es gilt $c_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $c_n > \alpha - \varepsilon > 1$ für unendlich viele n. Wie bei a) folgt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

$\square$

Beispiele:

a) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$; $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, also $\alpha = 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

b) $a_n := \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$; $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$, also $\alpha = 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

c) Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{falls } n = 2k \\ nx^n, & \text{falls } n = 2k-1 \end{cases}$
Frage: Für welche x ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergent? Es ist

$$c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } n = 2k \\ \sqrt[n]{n}|x|, & \text{falls } n = 2k-1 \end{cases}$$

(c_n) ist also beschränkt und $H(c_n) = \left\{\frac{1}{2}, |x|\right\}$.
Fall 1: $|x| < 1$. Dann ist $\alpha = \limsup_{n\to\infty} c_n < 1$, also ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Fall 2: $|x| > 1$. Dann ist $\alpha = \limsup_{n\to\infty} c_n > 1$, also ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
Fall 3: $|x| = 1$. Dann ist $\alpha = \limsup_{n\to\infty} c_n = 1$ und das Wurzelkriterium liefert keine Entscheidung. Es ist $|a_n| = n$ falls $n = 2k-1$. Also gilt $a_n \not\to 0$. Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ also divergent.

Satz 3.8 (Quotientenkriterium (QK))**:** *Es sei $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.*

a) Ist $c_n \geq 1$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

b) Es sei (c_n) beschränkt, $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$ und $\beta := \liminf_{n\to\infty} c_n$. Dann gilt:

(i) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $\beta > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Ohne Beweis.

Folgerung 3.9: (a_n) und (c_n) seien wie in 3.8, (c_n) sei konvergent und $\alpha := \lim_{n\to\infty} c_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent,} & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Im Falle $\alpha = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beispiele:

a) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

b) $a_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

3.10 Die Exponentialreihe: Für $x \in \mathbb{R}$ betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Frage: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe (absolut)?
Klar: Die Reihe konvergiert absolut für $x = 0$. Sei nun $x \neq 0$ und $a_n := \frac{x^n}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Es gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Mit 3.9 folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ konvergiert absolut für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist eine Funktion $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert:

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Sie heißt **Exponentialfunktion**. Es gilt: $E(0) = 1$, $E(1) \overset{\S 2}{=} e$.
Später zeigen wir $\forall r \in \mathbb{Q} : E(r) = e^r$ und definieren dann $e^x := E(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Dann ist also $e^x = E(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Definition: *Sei (a_n) eine Folge und $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Setze $b_n := a_{\varphi(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Also*

$$b_1 = a_{\varphi(1)}, \quad b_2 = a_{\varphi(2)}, \quad b_3 = a_{\varphi(3)}, \dots$$

Dann heißt (b_n) eine ***Umordnung*** *von (a_n).*

Beispiel: $(a_2, a_4, a_1, a_3, a_6, a_8, a_5, a_7, \dots)$ ist eine Umordnung von (a_n).

Satz 3.11: *Es sei (b_n) eine Umordnung von (a_n). Dann gilt:*

a) Ist (a_n) konvergent, so ist (b_n) konvergent und $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

b) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^\infty b_n$ absolut konvergent und

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty b_n.$$

Beweis:

a) Setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Da φ injektiv ist, ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) < n_0\}$ endlich. Also gilt:

$$|b_n - a| = |a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon \text{ ffa } n \in \mathbb{N}.$$

b) Ohne Beweis.

$\square$

Bemerkung (ohne Beweis)**:** Es sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann gilt:

a) Ist $s \in \mathbb{R}$, so existiert eine Umordnung (b_n) von (a_n) mit:

$$\sum_{n=1}^\infty b_n \text{ ist konvergent und } \sum_{n=1}^\infty b_n = s.$$

b) Es existiert eine Umordnung (c_n) von (a_n) mit: $\sum_{n=1}^\infty c_n$ ist divergent.

Definition: *Gegeben seien die Reihen $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$.*
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k, \ \textit{also}$$
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

*Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty c_n$ heißt das **Cauchyprodukt** (CP) von $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$.*

Satz 3.12: *Es seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergent. Für ihr Cauchyprodukt* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *gilt dann:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ ist absolut konvergent und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n).$$

Ohne Beweis.

Beispiel: Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$.
Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert absolut und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Also ist

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \overset{3.12}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Somit gilt:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1).$$

z.B. $(x = \frac{1}{2}) : 4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n}$.
Weiter gilt:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

z.B. $(x = \frac{1}{2}) : 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, also $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$.

3.13 Eigenschaften der Exponentialfunktion: $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$. Es gilt:

a) $E(0) = 1, E(1) = e$;

b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x + y) = E(x)E(y)$;

c) $\forall x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R} : E(x_1 + \ldots + x_m) = E(x_1) \cdot \ldots \cdot E(x_m)$;

d) $E(x) > 1$ $(x > 0)$; $E(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R})$; $E(-x) = E(x)^{-1}$ $(x \in \mathbb{R})$;

e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{Q} : E(rx) = E(x)^r$;

f) $\forall r \in \mathbb{Q} : E(r) = e^r$;

g) E ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, d.h. aus $x < y$ folgt stets $E(x) < E(y)$.

Beweis:

a) Ist bekannt.

b) Es gilt
$$E(x)E(y) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}) \overset{3.12}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$
mit
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{=\binom{n}{k}} x^k y^{n-k} \overset{§1}{=} \frac{1}{n!}(x+y)^n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Also: $E(x)E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y)$.

c) Folgt aus b).

d) Für $x > 0$ gilt $E(x) = 1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}_{>0} > 1$. Weiter ist
$$1 = E\left(x + (-x)\right) \overset{b)}{=} E(x)E(-x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$
Insbesondere gilt: $E(x) > 0$ $(x < 0)$ und $E(-x) = E(x)^{-1}$ $(x \in \mathbb{R})$.

e) Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$E(nx) = E(x + \ldots + x) \overset{c)}{=} E(x)^n.$$
Also ist
$$E(x) = E(n\frac{x}{n}) = (E(\frac{x}{n}))^n \;\Rightarrow\; E(\frac{1}{n}x) = E(x)^{\frac{1}{n}}.$$
Für $m, n \in \mathbb{N}$ folgt damit:
$$E(\frac{m}{n}x) = E(m\frac{x}{n}) = E(\frac{x}{n})^m = (E(x)^{\frac{1}{n}})^m = E(x)^{\frac{m}{n}}.$$
Somit gilt $E(rx) = E(x)^r$ für jedes $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > 0$. Sei $r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. Dann ist $-r > 0$, also
$$\frac{1}{E(rx)} = E(-rx) = E(x)^{-r} = \frac{1}{E(x)^r} \;\Rightarrow\; E(rx) = E(x)^r.$$

f) Folgt aus e) mit $x = 1$.

g) Es sei $x < y$. Dann gilt $y - x > 0$, also

$$\Rightarrow 1 \overset{d)}{<} E(y-x) \overset{b)}{=} E(y)E(-x) \overset{d)}{=} \frac{E(y)}{E(x)} \overset{d)}{\Rightarrow} E(x) < E(y).$$

$\square$

Kapitel 4

Potenzreihen

Definition: *Es sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

*heißt **Potenzreihe** (PR).*

Frage: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert eine Potenzreihe (absolut)?
Klar: Eine Potenzreihe konvergiert absolut für $x = x_0$.

Beispiele:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Hier: $a_n = \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $x_0 = 0$.
Bekannt: Die Potenzreihe konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n$. Hier: $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Bekannt: Die Potenzreihe konvergiert absolut $\iff$ $|x-x_0| < 1$ (geometrische Reihe).

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n(x-x_0)^n$. Hier: $a_n = n^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Es sei $x \neq x_0$ und $b_n := n^n(x-x_0)^n$. Es gilt: $\sqrt[n]{|b_n|} = n|x-x_0|$. Wegen $x \neq x_0$ ist $\left(\sqrt[n]{|b_n|}\right)$ unbeschränkt. Nach 3.7 ist $\sum_{n=0}^{\infty} n^n(x-x_0)^n$ divergent.
Also: $\sum_{n=0}^{\infty} n^n(x-x_0)^n$ konvergiert nur für $x = x_0$.

Definition: *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe. Setze*

$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \text{ unbeschränkt} \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

und

$$r := \begin{cases} 0, & \textit{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \textit{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \textit{falls } \rho \in (0, \infty) \end{cases}$$

*(kurz: "$r = \frac{1}{\rho}$"). r heißt der **Konvergenzradius** (KR) der Potenzreihe.*

Satz 4.1: *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe und ρ und r seien wie in obiger Definition. Dann gilt:*

a) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = x_0$.

b) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

c) Ist $r \in (0, \infty)$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| < r$ und sie divergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > r$. Für $x = x_0 \pm r$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}$ sei $b_n(x) := a_n(x - x_0)^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, also $\sqrt[n]{|b_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0|$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Es sei $x \neq x_0$. Es gilt $r = 0$ also $\rho = \infty$. Somit ist $\left(\sqrt[n]{|b_n(x)|}\right)$ unbeschränkt. Nach 3.7 ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)$ divergent.

b) Es gilt $r = \infty$ also $\rho = 0$. Somit ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|} = 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Mit 3.7 folgt die Behauptung.

c) Es gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| = \rho|x - x_0| = \frac{1}{r}|x - x_0|.$$

Also gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|} < 1 \iff |x - x_0| < r,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|} > 1 \iff |x - x_0| > r.$$

Die Behauptung folgt aus 3.7.

□

Folgerung: Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Beweis: Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ kovergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$. Nach 4.1 hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $r = \infty$, also ist $\rho = 0$, d.h.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Mit 3.6 folgt die Behauptung. □

Beispiele:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $x_0 = 0$; $\rho = 1$, $r = 1$.
Die Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$ absolut und sie divergiert für $|x| > 1$. Für $|x| = 1$ ist die Potenzreihe divergent.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $a_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, $x_0 = 0$.
Es gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$. Also ist $\rho = 1$ und damit $r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < 1$ und sie divergiert für $|x| > 1$.
Für $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.
Für $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert (nicht absolut).

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; $a_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$, $x_0 = 0$.
Es gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$. Also ist $\rho = 1$ und damit $r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < 1$ und sie divergiert für $|x| > 1$.
Für $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut.
Für $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergiert absolut.

In vielen Fällen läßt sich auch über das Quotientenkriterium 3.8 der Konvergenzradius einer Potenzreihe bestimmen:

Satz 4.2: *Es sei $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}_0$, die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$ sei konvergent und $L := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ den Konvergenzradius L.*

Ohne Beweis.

4.3 Cosinus: Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Hier: $x_0 = 0$, $a_{2n+1} = 0$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Wegen $0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Nach 4.1 hat obige Potenzreihe den Konvergenzradius $r = \infty$, konvergiert also absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

$$\textbf{Cosinus:} \begin{cases} \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \cos x := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

4.4 Sinus: Analog wie bei 4.3 sieht man: Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

$$\textbf{Sinus:} \begin{cases} \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \sin x := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, sowie

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin(-x) = -\sin(x), \ \cos(-x) = \cos(x).$$

Ähnlich wie in 3.13 zeigt man (mit dem Cauchyprodukt) die folgenden Additionstheoreme:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$1 = \cos(0) = \cos(x + (-x)) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

$$\cos^2 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \ \sin^2 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

und damit $|\cos x| \leq 1$ und $|\sin x| \leq 1$.

Kapitel 5

q-adische Entwicklung

Definition: *Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine größte ganze Zahl $\leq x$, also ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x < k+1$;*

$$[x] \coloneqq k.$$

Vereinbarung: In diesem §en sei stets $a \geq 0$ und $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Setze $z_0 \coloneqq [a]$, dann gilt: $z_0 \leq a < z_0 + 1$.
Setze $z_1 \coloneqq [(a - z_0)q]$, dann gilt: $z_1 \leq aq - z_0 q < z_1 + 1$.
Also:

$$z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{1}{q}.$$

Es gilt $z_1 \in \mathbb{N}_0$. Annahme: $z_1 \geq q$. Dann gilt $\frac{z_1}{q} \geq 1$, also

$$z_0 + 1 \leq z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + 1.$$

Widerspruch. Also ist $z_1 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.
Setze $z_2 \coloneqq [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2]$. Wie oben folgt

$$z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} + \frac{1}{q^2}.$$

und $z_2 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.
Allgemein (induktiv): Sind $z_0, \ldots, z_n$ schon definiert, so setze

$$z_{n+1} \coloneqq [(a - z_0 - \frac{z_1}{q} - \ldots - \frac{z_n}{q^n})q^{n+1}].$$

Wir erhalten so eine Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ mit:

$$(*) \begin{cases} z_0 \in \mathbb{N}_0,\ z_n \in \{0, 1, \ldots, q-1\}\ (n \geq 1) \\ \text{und} \\ \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \ldots + \frac{z_n}{q^n}}_{=:s_n} \leq a < \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \ldots + \frac{z_n}{q^n} + \frac{1}{q^n}}_{=s_n + \frac{1}{q^n}} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

In den großen Übungen wird gezeigt:

Satz 5.1: *Ist* $(\tilde{z}_n)_{n=0}^{\infty}$ *eine weitere Folge mit den Eigenschaften in* $(*)$*, so gilt:*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; z_n = \tilde{z}_n.$$

Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; 0 \leq \frac{z_n}{q^n} \leq \frac{q-1}{q^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q-1}{q^n} \text{ konvergiert.}$$

Nach 3.5 a) ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n}$ konvergent. Also ist (s_n) konvergent und mit $(*)$ folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n}.$$

Definition: *Ist* $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ *eine Folge mit* $y_0 \in \mathbb{N}_0$ *und* $y_n \in \{0, 1 \ldots, q-1\}$ $(n \in \mathbb{N})$*, so schreibt man*

$$y_0, y_1 y_2 y_3 y_4 \ldots := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{q^n}.$$

Bemerkungen:

a) Die Darstellung einer reellen Zahl als ein solcher Reihenwert ist nicht eindeutig. Z.B. ist $(q = 10)$:

$$1,0000000\ldots = 1 = 0,99999999\ldots$$

b) Gilt mit einem $m \in \mathbb{N} : y_n = 0 \; (n > m)$, so schreibt man auch:

$$y_0, y_1 \cdots y_m.$$

c) Obige Konstruktion der Folge (z_n) zeigt, daß jede reelle Zahl $a \geq 0$ als ein solcher Reihenwert geschrieben werden kann:

$$a = z_0, z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots$$

Die so erhaltene Darstellung von a heißt **die q-adische Entwicklung von** a. Sie ist nach 5.1 durch $(*)$ eindeutig bestimmt.

d) Sprechweisen: $q = 10$: Dezimalentwicklung; $q = 2$: Dualentwicklung.

Beispiele:

a) $q = 10$, $a = 1$. Dann gilt:

$$z_0 = 1,\ z_1 = [(a - z_0)q] = 0,\ z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = 0, \dots .$$

Induktiv folgt: $z_n = 0$ $(n \geq 1)$, also $1 = 1,000\dots$.

b) $q = 10$, $a = \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$z_0 = 0,\ z_1 = [(a - z_0)q] = [\frac{10}{2}] = 5,\ z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = [(\frac{1}{2} - \frac{5}{10})100] = 0, \dots .$$

Induktiv folgt: $z_n = 0$ $(n \geq 2)$, also $\frac{1}{2} = 0,5000\dots = 0,5$.

Definition: *Es sei $b \in \mathbb{R}$ und $b < 0$. Weiter sei $z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$ die q-adische Entwicklung von $-b$. Dann heißt $-z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$ die q-adische Entwicklung von b.*

Satz 5.2:

a) Es sei $z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$ die q-adische Entwicklung von a. Dann ist $z_n = q - 1$ ffa $n \in \mathbb{N}$ nicht möglich.

b) Ist $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit $y_0 \in \mathbb{N}_0$, $y_n \in \{0, 1 \dots, q-1\}$ $(n \in \mathbb{N})$, $a = y_0, y_1 y_2 y_3 \dots$ und $y_n = q - 1$ nicht ffa $n \in \mathbb{N}$, so ist $y_0, y_1 y_2 y_3 \dots$ die q-adische Entwicklung von a.

Beweis: a) Annahme: $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m$: $z_n = q - 1$. Dann gilt:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{q^n}}_{= s_{m-1}} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^n}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^m} &= (q-1)\left(\frac{1}{q^m} + \frac{1}{q^{m+1}} + \dots\right) \\ &= \frac{q-1}{q^m}\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots\right) \\ &= \frac{q-1}{q^m} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q^{m-1}}. \end{aligned}$$

Also ist $a = s_{m-1} + \frac{1}{q^{m-1}} \overset{(*)}{>} a$. Widerspruch.

b) Übung (mit 5.1). $\square$

Satz 5.3: $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $[0,1)$ überabzählbar ist. Annahme: $[0,1)$ ist abzählbar, also $[0,1) = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$a_j = 0, z_1^{(j)} z_2^{(j)} z_3^{(j)} \dots$$

die 3-adische Entwicklung von a_j, also $z_n^{(j)} \in \{0,1,2\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Setze

$$z_n \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{falls } z_n^{(n)} = 0 \text{ oder } z_n^{(n)} = 2 \\ 0, & \text{falls } z_n^{(n)} = 1 \end{cases}$$

Dann gilt $z_n \neq z_n^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ $(**)$. Setze $a \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{3^n}$. Es gilt:

$$0 \leq a \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}, \text{ also } a \in [0,1).$$

Nach 5.2 b) ist $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ die 3-adische Entwicklung von a. Wegen $a \in [0,1)$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a = a_m$, also

$$0, z_1 z_2 z_3 \dots = 0, z_1^{(m)} z_2^{(m)} z_3^{(m)} \dots .$$

Es folgt $z_j = z_j^{(m)}$ $(j \in \mathbb{N})$, also für $j = m$: $z_m = z_m^{(m)}$. Widerspruch zu $(**)$. $\square$

Kapitel 6

Grenzwerte bei Funktionen

Definition: *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 heißt ein* ***Häufungspunkt*** *(HP) von D $:\iff$ Es gibt eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$.*

Beispiele:

a) $D = (0, 1]$. Es gilt: x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff x_0 \in [0, 1]$.

b) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Es gilt: D hat genau einen Häufungspunkt: $x_0 = 0$.

c) $D = \mathbb{Q}$. Es gilt: Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von D.

d) Ist D endlich, so hat D keine Häufungspunkte.

Hilfssatz 6.1: *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$x_0 \textit{ ist Häufungspunkt von } D \iff \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Beweis:
"$\Rightarrow$": Es gibt eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \ x_n \in U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}).$$

"$\Leftarrow$": Nach Voraussetzung gilt:
$\exists x_1 \in U_1(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$, also $|x_1 - x_0| < 1$;
$\exists x_2 \in U_{\frac{1}{2}}(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$, also $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$; etc.
Wir erhalten eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

also $x_n \to x_0$. $\square$

Vereinbarung: Ab jetzt sei stets in diesem §en $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Bezeichnung:

a) $D_\delta(x_0) \coloneqq U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$.

b) Sei $M \subseteq D$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Wir schreiben "$f \leq g$ auf M" für "$f(x) \leq g(x)$ $(x \in M)$".

Definition: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existiert* $:\iff$ *Es gibt ein* $a \in \mathbb{R}$ *so, daß für jede Folge* (x_n) *in* $D \setminus \{x_0\}$ *mit* $x_n \to x_0$ *gilt:* $f(x_n) \to a$.
In diesem Fall ist a *eindeutig bestimmt und wir schreiben:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) \to a \ (x \to x_0).$$

Bemerkung: Sollte $x_0 \in D$ sein, so ist der Wert $f(x_0)$ in obiger Definition nicht relevant. Relevant ist allein das Verhalten von f in das "Nähe" von x_0.

Beispiele:

a) $D \coloneqq [0, \infty)$, $p \in \mathbb{N}$, $f(x) \coloneqq \sqrt[p]{x}$.
Es sei $x_0 \in D$ (dann ist x_0 eine Häufungspunkt von D). Es sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$. Nach 2.4 gilt dann: $\sqrt[p]{x_n} \to \sqrt[p]{x_0}$ $(n \to \infty)$. Also gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{x_0}.$$

b) $D = (0, 1]$,

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} x^2, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Klar: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$. Weiter sei

$$x_n \coloneqq \frac{1}{2} - \frac{1}{n},\ y_n \coloneqq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad (n \geq 3).$$

Es gilt $x_n \to \frac{1}{2}$, $y_n \to \frac{1}{2}$, aber $f(x_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{4} \neq 1 \leftarrow f(y_n)$.
D.h. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ existiert nicht. Schränkt man aber f auf $D \cap (-\infty, \frac{1}{2}) = (0, \frac{1}{2})$ ein, so gilt

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x \in (0, \frac{1}{2})}} f(x) = \frac{1}{4}.$$

Dafür schreibt man

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x) = \frac{1}{4} \text{ (linksseitiger Grenzwert).}$$

Analog: Schränkt man f auf $D \cap (\frac{1}{2}, \infty) = (\frac{1}{2}, 1]$ ein, so ist

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}+} f(x) := \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x \in (\frac{1}{2}, 1]}} f(x) = 1 \text{ (rechtsseitiger Grenzwert).}$$

c) $D = \mathbb{R}$, $f = E$, also $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Für $|x| \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
|E(x) - E(0)| = |E(x) - 1| &= |x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots| \\
&= |x| \left| 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right| \\
&\leq |x| \left(1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \dots \right) \\
&\leq |x| \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) \\
&= |x|(e-1).
\end{aligned}$$

Es sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to 0$. Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |x_n| \leq 1,$$

und somit

$$\forall n \geq n_0 : \ |E(x_n) - 1| \leq |x_n|(e-1).$$

Damit folgt $E(x_n) \to 1$. Somit ist $\lim_{x \to 0} E(x) = 1 = E(0)$. Es gilt also:

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{n!} \right).$$

Satz 6.2: *Es gilt:*

a)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D_\delta(x_0): \ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

b) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existiert*

$$\iff \quad \textit{Für jede Folge } (x_n) \textit{ in } D \setminus \{x_0\} \textit{ mit } x_n \to x_0 \textit{ ist } (f(x_n)) \textit{ konvergent.}$$

c) ***Cauchykriterium**:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \textit{ existiert} \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in D_\delta(x_0): \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Beweis:
b) und c) ohne Beweis.
a) "$\Rightarrow$": Es sei $\varepsilon > 0$. Annahme: Für kein $\delta > 0$ gilt $|f(x) - a| < \varepsilon$ $(x \in D_\delta(x_0))$. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D_{1/n}(x_0)$ mit $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$. Damit ist (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ und $f(x_n) \not\to a$ Widerspruch.
"$\Leftarrow$": Es sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ so, daß $|f(x) - a| < \varepsilon$ $(x \in D_\delta(x_0))$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ $(n \geq n_0)$. Für $n \geq n_0$ gilt damit $|f(x_n) - a| < \varepsilon$. Also gilt: $f(x_n) \to a$. $\square$

Satz 6.3: *Es seien* $f, g, h\colon D \to \mathbb{R}$ *Funktionen. Weiter seien* $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *und es gelte* $f(x) \to a$, $g(x) \to b$ $(x \to x_0)$. *Dann gilt:*

a)

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \to \alpha a + \beta b; \quad f(x)g(x) \to ab; \quad |f(x)| \to |a| \quad (x \to x_0).$$

b) Ist $a \neq 0$, *so existiert ein* $\delta > 0$ *mit* $f(x) \neq 0$ $(x \in D_\delta(x_0))$. *Für* $\frac{1}{f}\colon D_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{a} \quad (x \to x_0).$$

c) Für ein $\delta > 0$ gelte $f \le g$ auf $D_\delta(x_0)$. Dann ist $a \le b$.

d) Für ein $\delta > 0$ gelte $f \le h \le g$ auf $D_\delta(x_0)$. Ist $a = b$, so gilt $h(x) \to a$ $(x \to x_0)$.

Beweis: z. B.: c) Es sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$. Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : \ x_n \in D_\delta(x_0).$$

Also ist $f(x_n) \le g(x_n)$ $(n \ge n_0)$. Nach 2.2 folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \lim_{n\to\infty} g(x_n) = b.$$

Die anderen Aussagen beweist man analog durch Zurückführen auf 2.2. □

Definition:

a) Es sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

$$x_n \to \infty :\iff \ \forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : \ x_n > c,$$
$$x_n \to -\infty :\iff \ \forall c < 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : \ x_n < c.$$

Übung: Es gilt:
$x_n \to \infty \iff x_n > 0$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\frac{1}{x_n} \to 0$,
$x_n \to -\infty \iff x_n < 0$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\frac{1}{x_n} \to 0$.

b) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 sei ein Häufungspunkt von D und $g\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty :\iff \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D\setminus\{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0 \text{ gilt: } g(x_n) \to \infty,$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty :\iff \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D\setminus\{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0 \text{ gilt: } g(x_n) \to -\infty.$$

c) Es sei D nicht nach oben beschränkt, $g\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion und es sei $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = a :\iff \quad \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \to \infty \text{ gilt: } g(x_n) \to a.$$

d) Es sei D sei nicht nach unten beschränkt, $g\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion und es sei $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = a :\iff \quad \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \to -\infty \text{ gilt: } g(x_n) \to a.$$

Beispiel 6.4: $\frac{1}{x} \to \infty$ $(x \to 0+)$, $\frac{1}{x} \to -\infty$ $(x \to 0-)$, $\frac{1}{x} \to 0$ $(x \to \pm\infty)$.

6.5 Exponentialfunktion: $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
Es sei $p \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $x \geq 0$ gilt

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \ldots \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)!},$$

also

$$\frac{E(x)}{x^p} \geq \frac{x}{(p+1)!} \quad (x > 0).$$

Somit folgt:

$$\frac{E(x)}{x^p} \to \infty \quad (x \to \infty).$$

Insbesondere gilt $(p = 0)$:

$$E(x) \to \infty \quad (x \to \infty),$$

also

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)} \to 0 \quad (x \to \infty),$$

und damit

$$E(x) \to 0 \quad (x \to -\infty).$$

Kapitel 7

Stetigkeit

Definition: *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.*

*a) f heißt **in** x_0 **stetig** $:\iff$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$.*

*b) f heißt **auf** D **stetig** $:\iff$ f ist in jedem $x \in D$ stetig.*

c) Wir setzen

$$C(D) := C(D, \mathbb{R}) := \{g : D \to \mathbb{R} : \ g \textit{ ist stetig auf } D\}.$$

Beispiele:

a) $D = [0, \infty)$, $p \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sqrt[p]{x}$.
Bekannt: Ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0 \in D$, so gilt $f(x_n) \to f(x_0)$. Also gilt $f \in C\left([0, \infty)\right)$.

b) $D = [0, 1] \cup \{2\}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$
Offensichtlich gilt: f ist stetig in jedem $x \in [0, 1)$.

   (i) Es sei $x_0 = 1$, $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to 1$, aber $f(x_n) = x_n^2 \to 1 \neq 0 = f(1)$. Also ist f in $x_0 = 1$ nicht stetig.

   (ii) Es sei $x_0 = 2$, und (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to 2$. Dann ist $x_n = 2$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also $f(x_n) = 1$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $f(x_n) \to 1 = f(2)$. Also ist f in $x_0 = 2$ stetig.

Satz 7.1: *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann gilt:*

a)

$$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D: \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

b) Ist x_0 Häufungspunkt von D, so gilt:

$$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Beweis:

a) Fast wörtlich wie bei 6.2.

b) Übung.

□

Satz 7.2:

a) Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind

$$\alpha f + \beta g, \ fg \text{ und } \ |f| \ \text{ stetig in } x_0.$$

Ist $x_0 \in \tilde{D} \coloneqq \{x \in D : f(x) \neq 0\}$, so ist $\frac{1}{f}\colon \tilde{D} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

b) Sind $f, g \in C(D)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\alpha f + \beta g, \ fg, \ |f| \in C(D).$$

Beweis: a) Folgt aus 2.2; b) folgt aus a). □

Bemerkung: Satz 7.2 b) zeigt insbesondere: $C(D)$ ist ein reeller Vektorraum.

Satz 7.3: *Es seien $D, D_0 \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon D_0 \to \mathbb{R}$ Funktionen, $f(D) \subseteq D_0$, $x_0 \in D$ und $y_0 \coloneqq f(x_0)$. Ist f in x_0 stetig und ist g in y_0 stetig, so ist*

$$g \circ f\colon D \to \mathbb{R}, \ (g \circ f)(x) \coloneqq g(f(x))$$

stetig in x_0.

Beweis: Es sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$.
Da f stetig in x_0 ist gilt: $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$. Da g stetig in y_0 ist folgt

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

□

Satz 7.4: *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$. *Es sei* $D \coloneqq (x_0 - r, x_0 + r)$ *falls* $r < \infty$ *und* $D \coloneqq \mathbb{R}$ *falls* $r = \infty$. *Weiter sei*

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad (x \in D).$$

Dann gilt: $f \in C(D)$.

Wir beweisen 7.4 später, nach 8.3.

Beispiele: Nach 7.4 sind die Exponentialfunktion, und die Funktionen Sinus und Cosinus auf $\mathbb{R}$ stetig.

Beispiel 7.5: Behauptung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Beweis: Für $x \neq 0$ gilt:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots}_{\text{PR mit KR } r=\infty} \xrightarrow{7.4} 1 \ (x \to 0).$$

□

Beispiel 7.6: Behauptung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{E(x) - 1}{x} = 1.$$

Beweis: Für $x \neq 0$ gilt:

$$\frac{E(x) - 1}{x} = \frac{1}{x}\left((1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots) - 1\right) = \underbrace{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots}_{\text{PR mit KR } r=\infty} \xrightarrow{7.4} 1 \ (x \to 0).$$

□

Folgerung: Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(x_0 + h) - E(x_0)}{h} = E(x_0).$$

Beweis: Es gilt:

$$\frac{E(x_0 + h) - E(x_0)}{h} = \frac{E(x_0)E(h) - E(x_0)}{h} = E(x_0)\frac{E(h) - 1}{h} \xrightarrow{7.6} E(x_0)\ (h \to 0).$$

□

Satz 7.7 (Zwischenwertsatz)**:** *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C([a, b])$ und*

$$y_0 \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}],$$

also y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Beweis: Fall 1: Ist $f(a) = y_0$ oder $f(b) = y_0$ so gilt die Behauptung.
Fall 2: Es sei $f(a) \neq y_0 \neq f(b)$. O.B.d.A. sei $f(a) < f(b)$, also $f(a) < y_0 < f(b)$. Wir setzen

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq y_0\}.$$

Es gilt $a \in M$, also $M \neq \emptyset$. Wegen $M \subseteq [a, b]$ ist M beschränkt. Damit existiert $x_0 := \sup M$ und es gilt $x_0 \in [a, b]$. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $x_0 - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M, also existiert ein $x_n \in M$ mit

$$x_n > x_0 - \frac{1}{n}.$$

Also: $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0$. Somit gilt $x_n \to x_0$. Da f stetig in x_0 ist folgt $f(x_n) \to f(x_0)$. Nach Definition von M ist $f(x_n) \leq y_0$ $(n \in \mathbb{N})$, also $f(x_0) \leq y_0$.
Weiter gilt $x_0 < b$ (andernfalls: $x_0 = b \Rightarrow f(b) = f(x_0) \leq y_0 < f(b)$, Widerspruch).
Es sei $z_n := x_0 + \frac{1}{n}$. Es gilt $z_n \in [a, b]$ ffa $n \in \mathbb{N}$, und für diese n gilt:

$$z_n > x_0 \;\Rightarrow\; z_n \notin M \;\Rightarrow\; f(z_n) > y_0.$$

Wegen $z_n \to x_0$ folgt (f ist stetig): $f(z_n) \to f(x_0)$. Damit ist $f(x_0) \geq y_0$. □

Folgerung (vgl. 1.7)**:** Ist $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $x_0 > 0$ mit $x_0^n = a$.

Beweis: Es sei $b := 1 + a$ und $f(x) := x^n$ $(x \in [0, b])$.
Dann gilt:

$$f \in C([0, b]),\ f(0) = 0 < a,\ f(b) = (1 + a)^n \geq 1 + na > a.$$

Mit 7.7 folgt: $\exists x_0 \in [0, b] : f(x_0) = a$, also $x_0^n = a$. Wegen $a > 0$ ist $x_0 > 0$. $\square$

Bemerkung: Erst jetzt ist 1.7 vollständig bewiesen!

Aus 7.7 folgt mit $y_0 = 0$:

Satz 7.8 (Nullstellensatz von Bolzano)**:** *Ist $f \in C([a, b])$ und $f(a)f(b) \leq 0$, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$.*

7.9 Exponentialfunktion: $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Behauptung: $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Beweis: Nach 3.13 gilt $E(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R})$, also $E(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$.
Es sei $y_0 \in (0, \infty)$. Nach 6.5 gilt:

$$E(x) \to \infty\ (x \to \infty)\ \Rightarrow\ \exists b > 0 :\ E(b) > y_0,$$

$$E(x) \to 0\ (x \to -\infty)\ \Rightarrow\ \exists a < 0 :\ E(a) < y_0.$$

Mit 7.7 folgt: $\exists x_0 \in [a, b] : E(x_0) = y_0$, also $y_0 \in E(\mathbb{R})$. Somit ist $(0, \infty) \subseteq E(\mathbb{R})$. $\square$

Definition: *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$.*

a) *D heißt **abgeschlossen** $:\iff$ Für jede konvergente Folge (x_n) in D gilt*

$$\lim_{n \to \infty} x_n \in D.$$

b) *D heißt **kompakt** $:\iff$ Jede Folge (x_n) in D enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit*

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in D.$$

Satz 7.10: *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt:*

a) *D ist abgeschlossen $\iff$ Jeder Häufungspunkt von D gehört zu D.*

b) *D ist kompakt $\iff$ D ist beschränkt und abgeschlossen.*

c) *Ist D kompakt und $D \neq \emptyset$, so existieren* $\max D$ *und* $\min D$.

Beispiele:

a) $[a, b]$ ist kompakt, also auch abgeschlossen.

b) Endliche Mengen sind kompakt.

c) $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ und $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen, aber nicht kompakt.

d) $\emptyset$ ist kompakt.

e) $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) sind nicht abgeschlossen.

Beweis: (von 7.10):

a) Übung.

b) "$\Leftarrow$" Folgt direkt aus 2.13, "$\Rightarrow$" Übung.

c) Es sei $s := \sup D$. Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in D: \ s - \frac{1}{n} < x_n \leq s.$$

Somit gilt $x_n \to s$. Da D abgeschlossen ist folgt $s \in D$. Also ist $s = \max D$. Analog zeigt man: $\inf D \in D$.

$\square$

Definition: *$f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt $:\iff$ $f(D)$ ist* ***beschränkt****. Äquivalent ist*

$$\exists c \geq 0\ \forall x \in D: \ |f(x)| \leq c.$$

Satz 7.11: *Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$. Dann ist $f(D)$ kompakt. Insbesondere ist f beschränkt und es existieren $x_1, x_2 \in D$ mit $f(x_1) = \min f(D)$ und $f(x_2) = \max f(D)$, d.h.*

$$\forall x \in D: \ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Beweis: Es sei (y_n) eine Folge in $f(D)$. Dann existiert eine Folge (x_n) in D mit $f(x_n) = y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Da D kompakt ist enthält (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$. Da f stetig ist folgt

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in f(D).$$

□

Satz 7.12:

a) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und ist $f \in C(I)$, so ist $f(I)$ ein Intervall.

b) Sei $f \in C([a,b])$, $A := \min f([a,b])$ und $B := \max f([a,b])$, so ist $f([a,b]) = [A,B]$.

Beweis: a) Übung: Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn gilt:

$$x, y \in M,\ x < z < y \ \Rightarrow z \in M.$$

Damit folgt die Behauptung aus 7.7.
b) folgt aus a). □

Definition:

a) $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt ***monoton wachsend*** $:\iff$ *Aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt stets $f(x_1) \leq f(x_2)$.*
$f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt ***streng monoton wachsend*** $:\iff$ *Aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt stets $f(x_1) < f(x_2)$.*

b) Entsprechend definiert man ***(streng) monoton fallend****.*

c) f heißt ***(streng) monoton*** $:\iff$ *f ist (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend.*

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend). Dann ist f auf I injektiv, es existiert also die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(I) \to I$ und f^{-1} ist streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).
Es gilt:

$$\forall x \in I:\ f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall y \in f(I):\ f(f^{-1}(y)) = y.$$

Bemerkung: $f(I)$ ist im allgemeinen kein Intervall.

Satz 7.13: *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C(I)$ und f sei auf I streng monoton. Dann ist $f(I)$ ein Intervall (vgl. 7.12) und*

$$f^{-1} \in C\left(f(I)\right).$$

Ohne Beweis.

7.14 Der Logarithmus: Bekannt: E ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Es existiert also $E^{-1}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Die Funktion

$$\log x \coloneqq \ln x \coloneqq E^{-1}(x) \quad (x \in (0, \infty))$$

heißt **Logarithmus**.

Eigenschaften: Es gilt:

a) $\log 1 = 0$, $\log e = 1$;

b) $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend;

c) $\log\left((0,\infty)\right) = \mathbb{R}$;

d) $\log x \to \infty$ $(x \to \infty)$, $\log x \to -\infty$ $(x \to 0)$;

e) $\forall x, y > 0: \ \log(xy) = \log x + \log y$;

f) $\forall x, y > 0: \ \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$.

Beweis:

a) Folgt aus $E(0) = 1$ und $E(1) = e$.

b) Folgt aus 7.13.

c) Folgt aus $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

d) Folgt aus $E(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$ bzw. $E(x) \to 0$ $(x \to -\infty)$.

e) Es sei $z \coloneqq \log x + \log y$. Dann gilt:

$$E(z) = E(\log x + \log y) = E(\log x)E(\log y) = xy,$$

also

$$\log(xy) = \log E(z) = z.$$

f) Übung. (Ähnlich wie e)).

$\square$

Erinnerung: Nach 3.13 gilt: $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{Q}: \ E(rx) = E(x)^r$.
Es sei $a > 0$. Mit $x \coloneqq \log a$ erhalten wir:

$$\forall r \in \mathbb{Q}: \ E(r \log a) = E(\log a)^r = a^r.$$

7.15 Die allgemeine Potenz: Es sei $a > 0$. Wir definieren:

$$a^x \coloneqq E(x \log a) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Ist speziell $a = e$, so ist $e^x = E(x \log e) = E(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Somit gilt

$$a^x = e^{x \log a} \ (x \in \mathbb{R}, a > 0).$$

Eigenschaften: Es sei $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $a^x > 0$;

b) Die Funktion $x \mapsto a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig;

c) $a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} e^{y \log a} = a^x a^y$;

d) $a^{-x} = e^{-x \log a} = \frac{1}{e^{x \log a}} = \frac{1}{a^x}$;

e) $\log(a^x) = \log(e^{x \log a}) = x \log a$;

f) $(a^x)^y = e^{y \log a^x} \overset{e)}{=} e^{xy \log a} = a^{xy}$;

g) Ist auch $x > 0$, so ist $a^{x^y} \coloneqq a^{(x^y)}$. Im allgemeinen ist $a^{x^y} \neq (a^x)^y$.

Definition: *$f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt auf D* ***gleichmäßig stetig*** $:\iff$ *Sind (x_n), (y_n) Folgen in D mit $x_n - y_n \to 0$, so gilt $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.*

Erinnerung an 7.1: Es sei $f \in C(D)$, $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ mit:

$$\forall x \in D: \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die Zahl δ hängt also im Allgemeinen von ε und x_0 ab!

Bemerkung: Ähnlich wie in 7.1 kann man eine ε-δ-Bedingung für gleichmäßige Stetigkeit beweisen. Es gilt (ohne Beweis):
$f\colon D \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x, y \in D: |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Offensichtlich gilt: Ist f gleichmäßig stetig auf D, so ist f stetig auf D.

Satz 7.16 (Satz von Heine)**:**
Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und ist $f \in C(D)$, so ist f auf D gleichmäßig stetig.

Beweis: Annahme: f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ und Folgen (x_n), (y_n) in D mit $x_n - y_n \to 0$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$. Da D kompakt ist enthält (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$. Nun gilt

$$y_{n_k} = y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} \to 0 + x_0 = x_0 \quad (k \to \infty),$$

also $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to f(x_0) - f(x_0) = 0$ $(k \to \infty)$. Ein Widerspruch. □

Definition: *$f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt auf D* ***Lipschitz-stetig*** $:\iff$

$$\exists L \geq 0 \ \forall x, y \in D: \ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Übung: Ist f Lipschitz-stetig auf D, so ist f gleichmäßig stetig auf D.

Beispiele:

a) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist Lipschitz-stetig (also gleichmäßig stetig):

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| = |x + y||x - y| \\ &= (x + y)|x - y| \leq 2|x - y| \quad (x, y \in [0, 1]).\end{aligned}$$

b) $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ ist nicht gleichmäßig stetig, insbesondere nicht Lipschitz-stetig:
Betrachte $(x_n) = (n + \frac{1}{n})$, $(y_n) = (n)$. Es gilt $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$, aber

$$g(x_n) - g(y_n) = 2 + \frac{1}{n^2} \not\to 0 \quad (n \to \infty).$$

c) $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig (nach Satz 7.16) aber nicht Lipschitz-stetig (Übung).

Kapitel 8

Funktionenfolgen und -reihen

In diesem §en sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ und $s_n := f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Definition:

a) *Die Funktionenfolge (f_n) heißt **auf** D **punktweise konvergent** $:\iff$ Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(f_n(x))$ konvergent.*
   In diesem Fall sei
   $$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in D).$$
   *Die Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ heißt die **Grenzfunktion** von (f_n).*

b) *Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt **auf** D **punktweise konvergent** $:\iff$ Für jedes $x \in D$ ist die Folge $(s_n(x))$ konvergent.*
   In diesem Fall sei
   $$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in D).$$
   *Die Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ heißt die **Summenfunktion** von (f_n).*

Beispiele:

a) $D = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt:
   $$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$
   (f_n) konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen f.

b) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$ und $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ $(D := \mathbb{R}$, falls $r = \infty)$. Es sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Nach 4.1 gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D punktweise gegen die Summenfunktion

$$f: D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

c) $D = [0,\infty)$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Für jedes $x \in [0,\infty)$ gilt

$$f_n(x) = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Also konvergiert (f_n) auf D punktweise gegen $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Bemerkung: Punktweise Konvergenz von (f_n) auf D gegen f bedeutet:

$$\forall x \in D \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0: \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definition:

a) (f_n) konvergiert auf D gleichmäßig (glm) gegen $f\colon D \to \mathbb{R} :\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D: \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D gleichmäßig (glm) gegen $f\colon D \to \mathbb{R} :\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D: \; |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Offensichtlich folgt aus gleichmäßiger Konvergenz stets punktweise Konvergenz. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch (siehe Beispiele unten).

(f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f bedeutet anschaulich: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit:

Für $n \geq n_0$ liegt der Graph von f_n im "ε-Schlauch" um den Graphen von f.

Beispiele:

a) Es sei $D = [0,1], f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Bekannt: (f_n) konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Es sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Wegen $f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1)$ gilt

$$\left| f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) - f(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also konvergiert (f_n) auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen f.

b) Wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ auf $D = (-1,1)$. Es gilt:

$$\forall x \in D: \; s_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x} \quad (n \to \infty).$$

Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert also punktweise auf D gegen die Summenfunktion $f(x) := \frac{1}{1-x}$.
Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert auf D nicht gleichmäßig gegen f.
Beweis: Annahme: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (also (s_n)) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f. Zu $\varepsilon = 1$ existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|s_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < 1 \quad (n \geq n_0, \; x \in D).$$

Aber:

$$\frac{|x|^{n+1}}{1-x} \to \infty \quad (x \to 1-),$$

Widerspruch.

c) Es sei $D = [0, \infty)$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Bekannt:

$$\forall x \in D: \; f_n(x) \to 0 =: f(x).$$

Es sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Es gilt $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ und damit:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; |f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Also konvergiert (f_n) auf D nicht gleichmäßig gegen f.

Satz 8.1:

a) *Die Folge (f_n) konvergiere auf D punktweise gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$. Weiter sei (α_n) eine Folge mit $\alpha_n \to 0$, $m \in \mathbb{N}$ und*

$$\forall n \geq m\ \forall x \in D:\ |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n.$$

Dann konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f.

b) ***Kriterium von Weierstraß****: Es sei $m \in \mathbb{N}$, (c_n) eine Folge in $[0,\infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sei konvergent und*

$$\forall n \geq m\ \forall x \in D:\ |f_n(x)| \leq c_n.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig.

Beweis:

a) Es sei $\varepsilon > 0$. Es gilt:

$$\exists n_0 \geq m\ \forall n \geq n_0:\ \alpha_n < \varepsilon,$$

und damit

$$\forall n \geq n_0\ \forall x \in D:\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

b) Ohne Beweis.

$\square$

Satz 8.2: *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, es sei $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($D := \mathbb{R}$, falls $r = \infty$).*
Ist $[a,b] \subseteq D$, so konvergiert die Potenzreihe auf $[a,b]$ gleichmäßig.

Beweis: Es sei o.B.d.A. $x_0 = 0$.
Wähle $\delta > 0$ so, daß $-r < -\delta < a < b < \delta < r$. Für jedes $x \in [a,b]$ gilt dann $|x| \leq \delta$, also

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0:\ |a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n|\delta^n =: c_n.$$

Nach 4.1 konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\delta^n$ absolut, also ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent. Aus $(*)$ und 8.1 b) folgt die Behauptung. $\square$

Satz 8.3: *(f_n) bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere auf D gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

a) Sind alle f_n in $x_0 \in D$ stetig, so ist f in x_0 stetig.

b) Sind alle $f_n \in C(D)$, so ist $f \in C(D)$.

Folgerungen:

a) Konvergiert (f_n) auf D punktweise gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ und gilt $f_n \in C(D)$ $(n \in \mathbb{N})$ aber $f \notin C(D)$, so ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

b) Unter den Voraussetzung von 8.3 a) gilt: Ist x_0 ein Häufungspunkt von D, so ist:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \overset{8.3\ a)}{=} f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right).\end{aligned}$$

Beweis: (von 8.3)

a) Es sei (x_k) eine Folge in D mit $x_k \to x_0$. Wir zeigen $f(x_k) \to f(x_0)$: Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gilt:

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall x \in D:\ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da f_m stetig in x_0 ist gilt $f_m(x_k) \to f_m(x_0)$ $(k \to \infty)$. Damit folgt:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0:\ |f_m(x_k) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für $k \geq k_0$ gilt damit:

$$\begin{aligned}|f(x_k) - f(x_0)| &= |f(x_k) - f_m(x_k) + f_m(x_k) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)|\\ &\leq |f(x_k) - f_m(x_k)| + |f_m(x_k) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)|\\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

b) folgt aus a).

□

Beweis: (von 7.4) Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($D := \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ($x \in D$). Es sei $x \in D$. Wähle $a, b \in \mathbb{R}$ so, daß $x \in (a, b) \subseteq [a, b] \subseteq D$. Nach 8.2 konvergiert die Potenzreihe auf $[a, b]$ gleichmäßig. Nach 8.3 ist $f \in C([a, b])$. Also ist f in x stetig. Da $x \in D$ beliebig war ist $f \in C(D)$. $\square$

Satz 8.4 (Identitätssatz für Potenzreihen)**:** *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$, $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ *(*$D := \mathbb{R}$*, falls* $r = \infty$*) und* $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ $(x \in D)$.
Weiter sei (x_k) *eine Folge in* $D \setminus \{x_0\}$ *mit* $x_k \to x_0$ *und* $f(x_k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$*. Dann gilt:*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ a_n = 0.$$

Insbesondere ist dann $r = \infty$ *und* $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

Ohne Beweis.

Kapitel 9

Differentialrechnung

I.d. §en sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition: *f heißt **in** $x_0 \in I$ **differenzierbar** (db) $:\Longleftrightarrow$ Es existiert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Äquivalent ist: Es existiert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

*In diesem Fall heißt obiger Grenzwert die **Ableitung von** f **in** x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.*
*Ist f in jedem $x \in I$ differenzierbar, so heißt f **auf** I **differenzierbar** und die **Ableitung** $f' : I \to \mathbb{R}$ **von** f **auf** I ist gegeben durch $x \mapsto f'(x)$.*

Beispiele:

a) Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) \coloneqq c$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

b) Es sei $I = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Es gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

f ist also in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

c) Es sei $I = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \to n x_0^{n-1} \ (x \to x_0). \end{aligned}$$

Also ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = nx^{n-1}$ $(x \in \mathbb{R})$, kurz:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ auf } \mathbb{R}.$$

d) Es sei $I = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ gilt:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \xrightarrow{7.6} e^{x_0} \ (h \to 0).$$

Also ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, kurz:

$$(e^x)' = e^x \text{ auf } \mathbb{R}$$

Satz 9.1: *Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.*

Beweis: Es sei $x \in I$, $x \neq x_0$. Es gilt:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0 \ (x \to x_0)$$

Also gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Bemerkung: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ stetig aber in diesem Punkt nicht differenzierbar.

Satz 9.2 (Differentiationsregeln)**:** *Die Funktionen $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ seien in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann gilt:*

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ differenzierbar in x_0 und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ $(x \in J := I \cap U_\delta(x_0))$. Die Funktion $\frac{f}{g}\colon J \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis:

a) Übung.

b) Übung (man orientiere sich an c)).

c) Nach 9.1 ist g stetig in x_0. Wegen $g(x_0) \neq 0$ folgt mit 6.3 b):

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in I \cap U_\delta(x_0) =: J : \ g(x) \neq 0.$$

Sei $h := \frac{f}{g}$ auf J. Für $x \neq x_0$, $x \in J$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)} - f(x_0) \frac{\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x)}}{x - x_0} \\ &= \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\to \frac{1}{g(x_0)^2}} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} g(x_0) - f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \right) \\ &\to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad (x \to x_0).\end{aligned}$$

$\square$

Satz 9.3: *Es sei $f \in C(I)$ streng monoton, in $x_0 \in I$ differenzierbar und es sei $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} \colon f(I) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ und*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis: Nach 7.12 ist $f(I)$ ein Intervall. Es sei (y_n) eine Folge in $f(I)$ mit $y_n \to y_0$ und $y_n \neq y_0$ $(n \in \mathbb{N})$. Setze $x_n := f^{-1}(y_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Nach 7.13 ist $f^{-1} \in C(f(I))$, also gilt $x_n = f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0) = x_0$. Somit gilt:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \quad (n \to \infty).$$

$\square$

Satz 9.4 (Kettenregel)**:** *Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ sei ein weiteres Intervall, $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(I) \subseteq J$. Weiter sei f in $x_0 \in I$ differenzierbar und g sei in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist*

$$g \circ f\colon I \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar in } x_0$$

und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis: Für $y \in J$ sei

$$\tilde{g}(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y \neq y_0 \\ g'(y_0), & y = y_0 \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist g differenzierbar in y_0. Damit ist $\tilde{g}$ stetig in y_0, d.h.

$$\tilde{g}(y) \to \tilde{g}(y_0) = g'(y_0) = g'(f(x_0)) \quad (y \to y_0).$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(f(x)) \to g'(f(x_0)) \quad (x \to x_0)$$

Es ist $g(y) - g(y_0) = \tilde{g}(y)(y - y_0)$ $(y \in J)$. Damit folgt:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \tilde{g}(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to g'(f(x_0))f'(x_0) \quad (x \to x_0).$$

$\square$

Beispiele:

a) Es sei $a > 0$ und $h(x) = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$.
Mit $g(x) = e^x$ und $f(x) = x \log a$ gilt $h(x) = e^{x \log a} = g(f(x))$. Nach 9.4 gilt:

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a.$$

Kurz: $(a^x)' = a^x \log a$ auf $\mathbb{R}$.

b) Betrachte $f(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, $f^{-1}(y) = \log y$ $(y \in (0, \infty))$. Nach 9.3 ist f^{-1} auf $(0, \infty)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\log(y)}} = \frac{1}{y}.$$

Kurz: $(\log x)' = \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$.

c) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ $(x \in (0, \infty))$.

$$f'(x) = e^{\alpha \log x}(\alpha \log x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Kurz: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ auf $(0, \infty)$.

d) Aus Beispiel c) folgt: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ auf $(0, \infty)$.

Anwendung 9.5: Es sei $a \in \mathbb{R}$ und o.B.d.A. $a \neq 0$. Für $f(t) = \log(1+t)$ $(t > -1)$ gilt: $f'(t) = \frac{1}{1+t}$. Damit folgt:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{x \to \infty} \frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{a} x \log(1 + \frac{a}{x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{a} \log(1 + \frac{a}{x})^x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \log(1 + \frac{a}{x})^x = a \Rightarrow \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a.$$

Definition: *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $g\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

a) $x_0 \in M$ heißt ein ***innerer Punkt von M*** $:\iff \exists \delta > 0 : \; U_\delta(x_0) \subseteq M$

b) g hat in $x_0 \in M$ ein ***lokales Maximum [bzw. Minimum]*** $:\iff$

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M : \; g(x) \le g(x_0) \quad [\text{ bzw. } g(x) \ge g(x_0)].$$

Alternative Sprechweise: ***Relatives Maximum [bzw. Minimum].***

c) g hat in $x_0 \in M$ ein ***globales Maximum [bzw. Minimum]*** $:\iff$

$$\forall x \in M : \; g(x) \le g(x_0) \quad [\text{ bzw. } g(x) \ge g(x_0)].$$

Alternative Sprechweise: ***Absolutes Maximum [bzw. Minimum].***

d) ***"Extremum"*** *bedeutet "Maximum oder Minimum".*

Satz 9.6: *Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Ist x_0 ein innerer Punkt von I, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis: O.B.d.A. habe f in x_0 ein lokales Maximum. Dann gilt:

$$\exists \delta > 0: \ U_\delta(x_0) \subseteq I \text{ und } f(x) \leq f(x_0) \ (x \in U_\delta(x_0)).$$

Damit ist

$$D(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, & x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ \geq 0, & x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{cases}.$$

Also gilt $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} D(x) \leq 0$ und $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} D(x) \geq 0$. □

Satz 9.7 (Der Mittelwertsatz (MWS) der Differentialrechnung)**:**
Es sei $f \in C([a,b])$ und f sei auf (a,b) differenzierbar. Dann gilt:

$$\exists \xi \in (a,b): \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis: Wir setzen

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (x \in [a,b]).$$

Es gilt: $g \in C([a,b])$, g ist differenzierbar auf (a,b), $g(a) = g(b) = 0$ und

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (x \in (a,b)).$$

Wir zeigen: $\exists \xi \in (a,b)$: $g'(\xi) = 0$.
Fall 1: $g(x) = 0$ $(x \in [a,b])$. ✓
Fall 2: $g(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Nach 7.11 gilt:

$$\exists x_1, x_2 \in [a,b] \ \forall x \in [a,b]: \ g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2).$$

Nun ist $x_1 \in (a,b)$ oder $x_2 \in (a,b)$ (sonst wäre $g = 0$ auf $[a,b]$). Mit 9.6 folgt: $g'(x_1) = 0$ oder $g'(x_2) = 0$. □

Folgerung 9.8: Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I. Dann gilt:

$$f \text{ ist auf } I \text{ konstant} \iff \forall x \in I: \ f'(x) = 0.$$

Beweis: "$\Rightarrow$" ✓, "$\Leftarrow$" Es seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Nach 9.7 gilt:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2): \ f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

also $f(x_1) = f(x_2)$. □

Anwendung 9.9: Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

$$f' = f \text{ auf } I \iff \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = ce^x \ (x \in I)$$

Beweis: "$\Rightarrow$" ✓, "$\Leftarrow$" Setze $g(x) := \frac{f(x)}{e^x}$ $(x \in I)$. Dann gilt:

$$\forall x \in I: \ g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = 0.$$

Mit 9.8 folgt: $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in I : g(x) = c$, also $f(x) = ce^x$ $(x \in I)$. □

Satz 9.10: *$f, g\colon I \to \mathbb{R}$ seien auf I differenzierbar. Dann gilt:*

a) Ist $f' = g'$ auf I, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$ auf I.

b) Ist $f' \geq 0$ auf I, so ist f monoton wachsend auf I.
Ist $f' > 0$ auf I, so ist f streng monoton wachsend auf I.

c) Ist $f' \leq 0$ auf I, so ist f monoton fallend auf I.
Ist $f' < 0$ auf I, so ist f streng monoton fallend auf I.

Beweis:

a) Es gilt $(f-g)' = f' - g' = 0$ auf I. Mit 9.8 folgt die Behauptung.

b) Es sei z.B. $f' > 0$ auf I und $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Mit dem MWS folgt:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2): \ f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}(x_2 - x_1) > 0,$$

also $f(x_1) < f(x_2)$.

c) Analog zur b).

□

9.11 Die Regeln von de l'Hospital:
Es sei $I = (a, b)$, wobei $a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen ist. Es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ $(x \in I)$, und es sei $c = a$ oder $c = b$. Es existiere

$$L := \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Gilt (I) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ oder (II) $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$,
so ist

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ohne Beweis.

Beispiele:

a) Für $a, b > 0$ gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

c)

$$\lim_{x\to 0} x \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x \log x} = e^0 = 1.$$

d)

$$0 = \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x} \neq \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Die Voraussetzungen der Regeln von de l'Hospital sind hier nicht erfüllt.

Satz 9.12: *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ ($I = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ $(x \in I)$. Dann gilt:*

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ hat den Konvergenzradius r.

b) f ist auf I differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \quad (x \in I).$$

Beweis:

a) Es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^n$ konvergiert. Beide Potenzreihen haben also denselben Konvergenzradius. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Mit 4.1 folgt die Behauptung.

b) Ohne Beweis (kann mit 10.18 bewiesen werden).

$\square$

9.13 Sinus/Cosinus: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Nach 9.12 gilt: sin ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und

$$(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

Analog: cos ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $(\cos x)' = -\sin x$.

9.14 Definition von π:

a) Für $x \in (0,2)$ ist

$$\sin x = \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right)}_{>0} + \ldots > x - \frac{x^3}{3!} > 0.$$

Speziell: $\sin 1 > 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

b) $\exists \xi_0 \in (0,2)$: $\cos \xi_0 = 0$ und $\cos x > 0$ $(x \in [0, \xi_0))$

Beweis: Es gilt $\cos 0 = 1 > 0$ und

$$\begin{aligned} \cos 2 = \cos(1+1) &\overset{4.4}{=} \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos^2 1 + \sin^2 1 - 2\sin^2 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 1 \leq 1 - 2 \cdot \frac{25}{36} < 0. \end{aligned}$$

Mit 7.7 folgt: $\exists \xi_0 \in (0,2) : \cos \xi_0 = 0$. Weiter gilt:

$$\forall x \in (0,2) : \ (\cos x)' = -\sin x \overset{a)}{<} 0 \ \Rightarrow \ \forall x \in [0, \xi_0) : \ \cos x > 0.$$

$\square$

c) Es sei ξ_0 wie in b). Wir definieren

$$\pi := 2\xi_0.$$

Es gilt $\xi_0 \in (0,2)$, also $\pi \in (0,4)$ $(\pi \approx 3,14\ldots)$. Es ist $\frac{\pi}{2} = \xi_0$, also $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Damit gilt:

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow |\sin \frac{\pi}{2}| = 1 \overset{a)}{\Rightarrow} \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

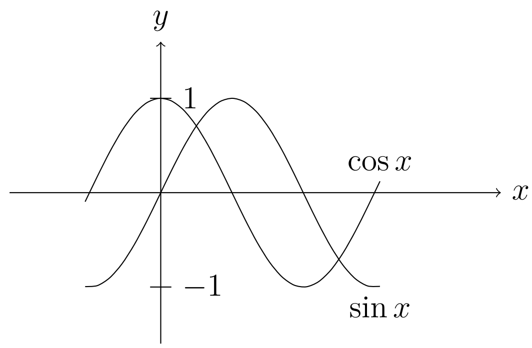

Abbildung 9.1: Sinus und Cosinus.

9.15 Weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus:

a) Aus 4.4 folgt:

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$$

Analog:

$$\begin{aligned} \cos(x + \frac{\pi}{2}) &= -\sin x \\ \sin(x + \pi) &= -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \end{aligned}$$

b) cos hat in $[0, \pi]$ genau eine Nullstelle. Ohne Beweis.

c) In der großen Übungen wird gezeigt:

$$\begin{aligned} \cos x = 0 &\iff x \in \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \\ \sin x = 0 &\iff x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Definition: *Die Funktion*

$$\tan \colon \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \ \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt ***Tangens***. *Es gilt:*

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Also ist tan *auf* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *streng monoton wachsend.*

Definition: *Es gilt (Übung):* $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$. *Es existiert also die Umkehrfunktion*

$$\arctan \coloneqq \tan^{-1} \colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Sie heißt ***Arkustangens****. Mit 9.3 folgt:*

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Satz 9.16 (Abelscher Grenzwertsatz)**:** *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r \in (0, \infty)$. *Dann gilt:*

a) *Konvergiert die Potenzreihe auch in* $x_0 + r$ *und ist*

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ für } x \in (x_0 - r, x_0 + r],$$

so ist f *stetig in* $x_0 + r$.

b) *Konvergiert die Potenzreihe auch in* $x_0 - r$ *und ist*

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ für } x \in [x_0 - r, x_0 + r),$$

so ist f *stetig in* $x_0 - r$.

Ohne Beweis.

Anwendungen 9.17:

a) Betrachte $f(x) = \log(1+x)$ $(x \in (-1, 1])$. Dann gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (x \in (-1,1) =: I).$$

Wir setzen $g(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ für $x \in (-1, 1]$. Nach 9.12 ist g differenzierbar auf I und

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} = f'(x) \quad (x \in I).$$

Damit existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$ $(x \in I)$. Mit $x = 0$ folgt $c = 0$. Also gilt:

$$f(x) = g(x) \quad (x \in I).$$

Da f und g stetig auf $(0, 1]$ sind (für g vgl. 9.16) gilt

$$f(x) = g(x) \quad (x \in (-1, 1]),$$

also

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (x \in (-1, 1]).$$

Insbesondere gilt mit $x = 1$:

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

b) Ähnlich wie in a) zeigt man (Übung):

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (x \in [-1, 1]).$$

Insbesondere gilt mit $x = 1$:

$$\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots .$$

Es gilt:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos(-\frac{\pi}{4}) \overset{9.15}{=} \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Somit gilt:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Definition:

a) Es sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar. Ist f' in $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f ***in x_0 zweimal differenzierbar*** *und*

$$f''(x_0) \coloneqq (f')'(x_0)$$

heißt ***die 2. Ableitung von f in*** *x_0.*

b) *Ist f' auf I differenzierbar, so heißt f* ***auf I zweimal differenzierbar*** *und*

$$f'' := (f')'$$

die 2. Ableitung von f auf I. *Entsprechend definiert man, falls vorhanden:*

$$f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), f^{(5)}(x_0), \ldots \text{ und } f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots$$

c) *Für $n \in \mathbb{N}$ heißt f* ***auf I n-mal stetig differenzierbar*** *$:\iff$ f ist auf I n-mal differenzierbar und $f^{(n)} \in C(I)$. In diesem Fall gilt: $f, f', \ldots, f^{(n)} \in C(I)$. Wir setzen*

$$C^0(I) := C(I), \quad f^{(0)} := f,$$

$$C^n(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : \ f \text{ ist auf } I \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar}\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$C^\infty(I) := \bigcap_{n \geq 0} C^n(I).$$

Beispiele:

a) $(e^x)''' = e^x$, $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$. Es gilt: $E, \sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$.

b) Betrachte $f(x) = x|x|$ $(x \in \mathbb{R})$. Es gilt:

   Für $x > 0$: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$.

   Für $x < 0$: $f(x) = -x^2$, $f'(x) = -2x$.

   Für $x = 0$: $\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = |t| \to 0$ $(t \to 0)$, also $f'(0) = 0$.

   Somit ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, $f'(x) = 2|x|$ $(x \in \mathbb{R})$ und f' ist stetig auf $\mathbb{R}$. In $x_0 = 0$ ist f nicht zweimal differenzierbar. Also gilt: $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \notin C^2(\mathbb{R})$.
   Bemerkung: Allgemein gilt:

$$C^0(I) \supsetneqq C^1(I) \supsetneqq C^2(I) \supsetneqq C^3(I) \supsetneqq \ldots$$

Beispiel 9.18:
Wir betrachten $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Auf $(0,1]$ gilt:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} + x^{\frac{3}{2}}(\cos\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}.$$

Weiter gilt:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{beschr.}} \to 0 \quad (x \to 0).$$

Also ist f auf $[0,1]$ differenzierbar (mit $f'(0) = 0$). Für $x_n \coloneqq \frac{1}{2n\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt: $x_n \to 0$ und

$$f'(x_n) = -\sqrt{2n\pi}\cos(2n\pi) = -\sqrt{2n\pi} \to -\infty \quad (n \to \infty).$$

Damit ist f' auf $[0,1]$ nicht beschränkt, also insbesondere nicht stetig auf $[0,1]$.
Also: f ist auf $[0,1]$ differenzierbar, aber $f \notin C^1([0,1])$.

Satz 9.19: *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I \coloneqq (x_0 - r, x_0 + r)$ ($I = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und*

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad (x \in I).$$

Dann gilt $f \in C^\infty(I)$ und

$$\forall k \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in I:\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Mit $x = x_0$ folgt insbesondere: $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$, also

$$\forall k \in \mathbb{N}_0:\ a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Beweis: Folgt induktiv aus 9.12. □

Satz 9.20 (Satz von Taylor)**:**
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und f sei auf I $(n+1)$-mal differenzierbar. Es seien $x, x_0 \in I$ und $x \neq x_0$. Dann existiert ein $\xi \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ mit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Ohne Beweis.

Bemerkungen:

a) Im Fall $n = 0$ folgt sie Aussage von 9.20 direkt aus dem MWS.

b) $T_n f(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ ist ein Polynom form Grad $\leq n$ und heißt n-tes **Taylorpolynom von** f **im Punkt** x_0. Der Term $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ heißt **Restglied**.

Satz 9.21: *Es sei $n \geq 2$, $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ sei ein innerer Punkt von I, und*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \textit{ und } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

b) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

c) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.

Beweis: Aus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und $f^{(n)} \in C(I)$ folgt:

$$(*) \quad \exists \delta > 0: \; U_\delta(x_0) \subseteq I \text{ und } f^{(n)}(x)f^{(n)}(x_0) > 0 \; (x \in U_\delta(x_0)).$$

Es sei $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Nach 9.20 existiert ein ξ zwischen x und x_0 mit:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{=f(x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n}_{=:R(x)}$$

a) Es gilt $f^{(n)}(x_0) < 0$. Mit $(*)$ folgt $f^{(n)}(\xi) < 0$. Da n gerade ist gilt $(x - x_0)^n > 0$. Also ist $R(x) < 0$. Somit gilt:

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}: \; f(x) < f(x_0).$$

b) Analog zu a).

c) Es sei o.B.d.A. $f^{(n)}(x_0) > 0$, also $f^{(n)}(\xi) > 0$. Da n ungerade ist gilt

$$(x - x_0)^n \begin{cases} > 0, & x > x_0 \\ < 0, & x < x_0 \end{cases}$$

und damit

$$R(x) \begin{cases} > 0, & x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ < 0, & x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) \begin{cases} > f(x_0), & x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ < f(x_0), & x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{cases}.$$

□

Kapitel 10

Das Riemann-Integral

Vereinbarung: In diesem §en sei stets $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und f beschränkt auf $[a,b]$. Wir setzen $m := \inf f([a,b]), M := \sup f([a,b])$.

Definition:

a) *$Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt eine **Zerlegung** von $[a,b] :\iff$*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

$\mathcal{Z} := \{Z : Z$ ist eine Zerlegung von $[a,b]\}$.

b) *Es sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}$. Wir definieren*

$$I_j := [x_{j-1}, x_j],\ |I_j| := x_j - x_{j-1},\ m_j := \inf f(I_j),\ M_j := \sup f(I_j) \quad (j = 1, \dots, n),$$

sowie

$$s_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| \quad (\text{die } \textbf{Untersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z),$$
$$S_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j| \quad (\text{die } \textbf{Obersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z).$$

Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $m \leq m_j \leq M_j \leq M$, also $m|I_j| \leq m_j|I_j| \leq M_j|I_j| \leq M|I_j|$ und somit

$$(*) \quad m(b-a) = m\sum_{j=1}^{n} |I_j| \leq s_f(Z) \leq S_f(Z) \leq M \sum_{j=1}^{n} |I_j| = M(b-a).$$

Definition: *Es seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$. Z_2 heißt eine Verfeinerung von $Z_1 :\iff Z_1 \subseteq Z_2$.*

Satz 10.1: *Es seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$. Dann gilt:*

a) *$s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$.*

b) Ist $Z_1 \subseteq Z_2$, so gilt:

$$s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2), \quad S_f(Z_1) \geq S_f(Z_2).$$

Ohne Beweis.

Aus $(*)$ folgt: Es existieren

$$s_f := \sup\{s_f(Z) \colon Z \in \mathcal{Z}\} \text{ und } S_f := \inf\{S_f(Z) \colon Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Aus $(*)$ und 10.1 a) folgt:

$$m(b-a) \leq s_f \leq S_f \leq M(b-a).$$

Definition:
*Die Funktion f heißt (Riemann-)**integrierbar (ib) über** $[a,b] :\iff s_f = S_f$.*
In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x) dx := S_f (= s_f)$$

*das (Riemann-)**Integral von f über** $[a,b]$ und wir schreiben:*

$$f \in R([a,b]) \text{ oder } f \in R([a,b], \mathbb{R}).$$

Beispiele:

a) Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c$ $(x \in [a,b])$. Dann gilt $c(b-a) \leq s_f \leq S_f \leq c(b-a)$, also $f \in R([a,b])$ und $\int_a^b c dx = c(b-a)$.

b) Es sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Hier gilt: $m_j = \inf f(I_j) = 0$, $M_j = \sup f(I_j) = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, also $s_f(Z) = 0$, $S_f(Z) = 1$. Somit ist $s_f = 0 \neq 1 = S_f$ und damit $f \notin R([0,1])$.

Satz 10.2: *Es seien $f, g \in R([a,b])$. Dann gilt:*

a) Ist $f \leq g$ auf $[a,b]$, so ist $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$.

b) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R([a,b])$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

Beweis: Nur a) (b) Übung): Es sei $Z = \{x_0, \dots x_n\} \in \mathcal{Z}$, I_j und m_j wie immer. Es sei $\widetilde{m}_j := \inf g(I_j)$ $(j = 1, \dots, n)$. Wegen $f \leq g$ auf I_j gilt:

$$m_j \leq \widetilde{m}_j \ (j = 1, \dots, n) \text{ und damit } s_f(Z) \leq s_g(Z) \leq s_g.$$

Da $Z \in \mathcal{Z}$ beliebig war folgt

$$\int_a^b f dx = s_f \leq s_g = \int_a^b g dx.$$

□

Satz 10.3 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)**:**
Es gilt:

$$f \in R([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists Z = Z(\varepsilon) \in \mathcal{Z} : \ S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon.$$

Ohne Beweis.

Satz 10.4: *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in R([a,b])$.*

Beweis: O.B.d.A. sei f monoton wachsend. Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Für $j = 0, \dots, n$ sei $x_j := a + j\frac{b-a}{n}$. Damit ist $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}$. Es seien I_j, m_j und M_j wie immer. Es gilt:

$$|I_j| = \frac{b-a}{n}, \ m_j = f(x_{j-1}), \ M_j = f(x_j) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Also:

$$\begin{aligned} S_f(Z) - s_f(Z) &= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)|I_j| \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit 10.3 folgt die Behauptung. □

Satz 10.5: *Es gilt:* $C([a,b]) \subseteq R([a,b])$.

Beweis: Es sei $f \in C([a,b])$ und $\varepsilon > 0$. Mit 7.16 folgt:

$$(*) \quad \exists \delta > 0 \; \forall t, s \in [a,b] : \; |t-s| < \delta \; \Rightarrow \; |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Es sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{Z}$ so gewählt, daß $|I_j| < \delta$ ($j = 1, \ldots, n$), und I_j, M_j, m_j seien wie immer. Betrachte I_j: Nach 7.11 gilt:

$$\exists \xi, \eta \in I_j : \; f(\xi) = m_j, \; f(\eta) = M_j.$$

Wegen $|I_j| < \delta$ ist $|\xi - \eta| < \delta$ und mit $(*)$ folgt:

$$M_j - m_j = f(\eta) - f(\xi) = |f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Damit ist

$$S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)|I_j| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \varepsilon.$$

Mit 10.3 folgt die Behauptung. □

Definition: *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $G, g \colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktion G heißt eine* ***Stammfunktion von*** *g* ***auf*** *I $:\Longleftrightarrow$ G ist auf I differenzierbar und $G' = g$ auf I.*

Beachte: Sind G und H Stammfunktionen von g auf I, so ist $G' = g = H'$ auf I und nach 9.10 gilt

$$\exists c \in \mathbb{R} \; \forall x \in I : \; G(x) = H(x) + c.$$

Satz 10.6 (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**:**
Ist $f \in R([a,b])$ und besitzt f auf $[a,b]$ eine Stammfunktion F, so ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Es sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{Z}$, und I_j, m_j, M_j seien wie immer. Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) \overset{MWS}{=} F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j) \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{=|I_j|},$$

mit $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$. Wegen $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$ gilt $m_j|I_j| \leq f(\xi_j)|I_j| \leq M_j|I_j|$. Summation über j liefert

$$s_f(Z) \leq \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j| = \sum_{j=1}^{n} (F(x_j) - F(x_{j-1})) = F(b) - F(a) \leq S_f(Z).$$

Also gilt:

$$\forall Z \in \mathcal{Z}: \; s_f(Z) \leq F(b) - F(a) \leq S_f(Z).$$

Wegen $f \in R([a,b])$ folgt:

$$\int_a^b f dx = s_f \leq F(b) - F(a) \leq S_f = \int_a^b f dx.$$

$\square$

In Rechnungen ist folgende Schreibweise nützlich:

$$F(x)\Big|_a^b := [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Beispiele:

a) Es sei $0 < a < b$, $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in [a,b])$. Es gilt $f \in C([a,b]) \overset{10.5}{\Longrightarrow} f \in R([a,b])$, und $F(x) := \log x$ ist eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$. Mit 10.6 folgt:

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log x\Big|_a^b = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}.$$

b) Es gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Bemerkung:

a) Es gibt integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen!

b) Es gibt nicht integrierbare Funktionen, die Stammfunktionen besitzen!

Beispiele:

a) Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

f ist monoton $\overset{10.4}{\Longrightarrow} f \in R([0,1])$.

Annahme: f besitzt auf $[0,1]$ eine Stammfunktion F. Dann gilt:

$$F'(x) = f(x) \ (x \in [0,1]), \text{ also } F'(x) = 1 \ (x \in (0,1]).$$

Mit 9.10 folgt: $\exists c \in \mathbb{R} : F(x) = x + c \ (x \in (0,1])$. Weiter gilt:

F ist differenzierbar in $0 \Rightarrow F$ ist stetig in $0 \Rightarrow F(0) = c$. Also ist $F(x) = x + c$ $(x \in [0,1])$. Es folgt

$$0 = f(0) = F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x + c - c}{x} = 1,$$

ein Widerspruch.

b) Betrachte

$$F(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Nach 9.18 ist F ist auf $[0,1]$ differenzierbar. Setze $f := F'$. Dann ist F eine Stammfunktion von f auf $[0,1]$. Nach 9.18 ist f auf $[0,1]$ nicht beschränkt, also $f \notin R([a,b])$.

Satz 10.7: *Es sei $c \in (a,b)$. Dann gilt:*

$$f \in R([a,b]) \iff f \in R([a,c]) \textit{ und } f \in R([c,b]).$$

In diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

Ohne Beweis.

Motivation: Für $n \geq 2$ sei

$$f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ n - (x - \frac{1}{n})n^2, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

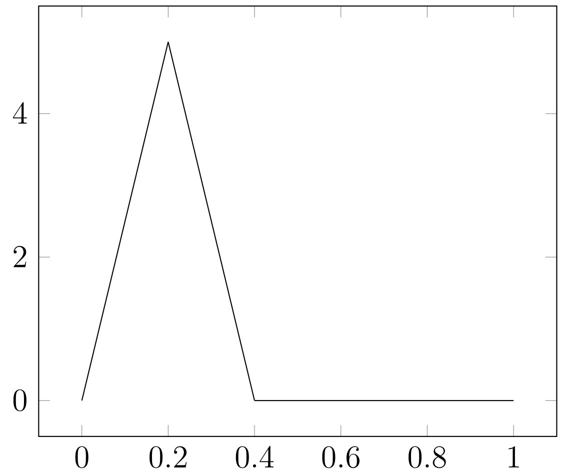

Abbildung 10.1: f_n für $n = 5$.

Es gilt:

$$f_n \in C([0,1]) \overset{10.5}{\Longrightarrow} f_n \in R([0,1]) \underset{10.7}{\overset{10.6}{\Longrightarrow}} \int_0^1 f_n dx = 1 \ (n \geq 2).$$

Übung: (f_n) konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen $f = 0$. Also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Satz 10.8: *Es sei (f_n) eine Folge in $R([a,b])$ und (f_n) konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt: $f \in R([a,b])$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Ohne Beweis.

Satz 10.9: *Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I \coloneqq (x_0 - r, x_0 + r)$ ($I \coloneqq \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und*

$$g(x) \coloneqq \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n \quad (x \in I)$$

Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ den Konvergenzradius r und für

$$(*) \quad G(x) \coloneqq \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \quad (x \in I).$$

gilt $G' = g$ auf I.

Beweis: Es sei $\tilde{r}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe in $(*)$. Nach 9.12 gilt $r = \tilde{r}$ und $G' = g$ auf I. $\square$

Satz 10.10: *Es seien $f, g \in R([a,b])$. Dann gilt:*

a) *Es sei $D := f([a,b])$ und mit einem $L \geq 0$ gelte für $h\colon D \to \mathbb{R}$:*

$$|h(s) - h(t)| \leq L|s - t| \quad (t, s \in D).$$

Dann ist $h \circ f \in R([a,b])$.

b) $|f| \in R([a,b])$ *und* $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ *($\triangle$-Ungleichung für Integrale).*

c) $fg \in R([a,b])$.

d) *Ist $g(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$ und $\frac{1}{g}$ auf $[a,b]$ beschränkt, so ist $\frac{1}{g} \in R([a,b])$.*

Beweis:

a) , c) und d) ohne Beweis.

b) Es sei $D := f([a,b])$ und $h(t) := |t|$ $(t \in D)$. Dann ist $|f| = h \circ f$. Für $t, s \in D$ gilt:

$$|h(t) - h(s)| = ||t| - |s|| \leq |t - s|.$$

Aus a) folgt $|f| \in R([a,b])$. Weiter ist $\pm f \leq |f|$ auf $[a,b]$. Mit 10.2 folgt

$$\pm \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx, \text{ also } |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

$\square$

Definition: *Es sei $f \in R([a,b])$ und $\alpha, \beta \in [a,b]$. Wir setzen*

$$\int_\alpha^\alpha f(x)dx := 0.$$

Ist $\alpha < \beta$, so ist nach 10.7 $f \in R([\alpha,\beta])$ und wir setzen

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx := -\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Satz 10.11 (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**:**
Es sei $f \in R([a,b])$ *und*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a,b]).$$

Dann gilt:

a) $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \ (x, y \in [a,b])$.

b) F *ist Lipschitz-stetig.*

c) Ist $f \in C([a,b])$, *so ist* $F \in C^1([a,b])$ *und* $F'(x) = f(x) \ (x \in [a,b])$.

Beweis:

a) Es seien $x, y \in [a,b]$.
Fall 1: Für $x \leq y$ gilt

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &\overset{10.7}{=} \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^y f(t)dt \end{aligned}$$

Fall 2: Für $x > y$ gilt

$$F(y) - F(x) = -(F(x) - F(y)) \overset{Fall 1}{=} -\int_y^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt.$$

b) Setze $L := \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$. Es seien $x, y \in [a,b]$ und o.B.d.A. sei $x \leq y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &\overset{a)}{=} |\int_x^y f(t)dt| \overset{10.10}{\leq} \int_x^y |f(t)|dt \overset{10.2}{\leq} \int_x^y Ldt \\ &= L(y-x) = L|y-x|. \end{aligned}$$

c) Wir zeigen für $x_0 \in [a,b)$:

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

(analog zeigt man für $x_0 \in (a,b]$: $\lim_{h\to 0-} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$).
Sei also $x_0 \in [a,b)$, $h > 0$ und $x_0 + h \in [a,b]$. Es ist

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt = f(x_0)$$

und

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \overset{a)}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} D(h) &\coloneqq \left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \\ &= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt\right| \\ &\overset{10.10}{\leq} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt. \end{aligned}$$

Die Funktion $t \mapsto |f(t)-f(x_0)|$ ist stetig auf $[a,b]$. Nach 7.11 gilt daher:

$$\exists \xi_h \in [x_0, x_0+h] \; \forall t \in [x_0, x_0+h] : \; |f(t)-f(x_0)| \leq |f(\xi_h)-f(x_0)|.$$

Also gilt:

$$D(h) \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(\xi_h)-f(x_0)|dt = |f(\xi_h)-f(x_0)|.$$

Für $h \to 0+$ gilt $\xi_h \to x_0$. Da f stetig ist folgt $f(\xi_h) \to f(x_0)$ $(h \to 0+)$, also $D(h) \to 0$ $(h \to 0+)$.

□

Aus 10.11 folgt (Übung):

Folgerung 10.12: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g \in C(I)$ und $x_0 \in I$ (fest). Definiere $G\colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Dann gilt: $G \in C^1(I)$ und $G' = g$ auf I.

Definition: *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Besitzt $g\colon I \to \mathbb{R}$ auf I eine Stammfunktion, so schreibt man für eine solche auch*

$$\int g dx \text{ oder } \int g(x) dx$$

*und nennt dies ein **unbestimmtes Integral** von g.*

Beispiel 10.13:

$$\int \cos x dx = \sin x, \quad \int \cos x dx = \sin x + 17.$$

Satz 10.14 (Partielle Integration)**:**
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt:

a) $\int f' g dx = fg - \int f g' dx$ auf I.

b) Ist $I = [a, b]$, so ist $\int_a^b f' g dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f g' dx$.

Beweis: Es gilt $(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$ und damit a), sowie

$$\int_a^b f' g dx = \int_a^b (fg)' dx - \int_a^b f g' dx \overset{10.6}{=} fg\Big|_a^b - \int_a^b f g' dx.$$

□

Beispiele:

a)
$$\int \sin^2 x dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g} dx = -\cos x \sin x - \int -\cos^2 x dx$$
$$= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx = -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$
$$= x - \cos x \sin x - \int \sin^2 x dx$$
$$\Rightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x).$$

b) Ungeeignete Anwendung der partiellen Integration:
$$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx = \frac{1}{2} x^2 e^x - \int \frac{1}{2} x^2 e^x dx.$$

Besser:
$$\int \underbrace{x}_{g} \underbrace{e^x}_{f'} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

c)

$$\int \log x dx = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log x}_{g} dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x.$$

Bezeichnung: Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq \beta$. Wir setzen

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \begin{cases} [\alpha, \beta], & \text{falls } \alpha < \beta \\ [\beta, \alpha], & \text{falls } \alpha > \beta \end{cases}$$

Satz 10.15 (Substitutionsregeln)**:**
Es seien I und J Intervalle in $\mathbb{R}$, es sei $f \in C(I)$, $g \in C^1(J)$ und $g(J) \subseteq I$.

a) Es gilt

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=g(t)} \quad \textit{auf } J.$$

b) Es sei $g'(t) \neq 0$ $(t \in J)$ $(\Rightarrow g' > 0$ auf J oder $g' < 0$ auf $J \Rightarrow g$ ist streng monoton). Dann gilt:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} \quad \textit{auf } I.$$

c) Ist $I = \langle a, b \rangle$, $J = \langle \alpha, \beta \rangle$, $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Beweis: Nach 10.12 hat f auf I eine Stammfunktion F. Setze $G(t) := F(g(t))$ $(t \in J)$. Es gilt (Kettenregel): $G \in C^1(J)$ und

$$G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \quad (t \in J)$$

und damit

a)

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int G'(t)dt = G(t) = F(g(t)) = \int f(x)dx \Big|_{x=g(t)}.$$

b)

$$\int f(g(t))g'(t)dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = G(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x))) = F(x) = \int f(x)dx.$$

c)

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt \overset{10.6}{=} G(\beta) - G(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$
$$= F(b) - F(a) \overset{10.6}{=} \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

Merkregel: Ist $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, so schreibt man für y' auch $\frac{dy}{dx}$. Zu 10.15: Substituiere $x = g(t)$, fasse also x als Funktion von t auf. Dann: $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, also

$$\text{“}dx = g'(t)dt\text{“}.$$

Beispiele:

a)

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx \quad \begin{cases} x = \log t, e^x = t \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, dx = \frac{1}{t}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = e \end{cases}$$

$$= \int_1^e \frac{t^2+1}{t} \cdot \frac{1}{t}dt = \int_1^e \frac{t^2+1}{t^2} = \int_1^e (1 + \frac{1}{t^2})dt$$
$$= \left[t - \frac{1}{t}\right]_1^e = e - \frac{1}{e} - (1-1) = e - \frac{1}{e}.$$

b)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad \begin{cases} x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{dx}{dt} = \cos t, dx = \cos t dt \end{cases}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)dt$$
$$= \left[t - \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Satz 10.16: *Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

a) *Ist* $\{x \in [a,b] : f$ *ist in* x *nicht stetig* $\}$ *endlich, so ist* $f \in R([a,b])$.

b) *Ist* $f \in R([a,b])$ *und* $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ *endlich, so ist* $g \in R([a,b])$ *und*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Ohne Beweis.

Satz 10.17: *Es seien* $f, g \in R([a,b])$, $g \geq 0$ *auf* $[a,b]$, $m := \inf f([a,b])$ *und* $M := \sup f([a,b])$. *Dann gilt:*

a) $\exists \mu \in [m, M]$: $\int_a^b fg dx = \mu \int_a^b g dx$.

b) $\exists \mu \in [m, M]$: $\int_a^b f dx = \mu(b-a)$.

Ist $f \in C([a,b])$, *so existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit* $\mu = f(\xi)$ *in a) bzw. b).*

Beweis:

a) Aus $g \geq 0$ auf $[a,b]$ folgt $mg \leq fg \leq Mg$ auf $[a,b]$. Mit 10.2 folgt

$$m \underbrace{\int_a^b g dx}_{=:A} \leq \underbrace{\int_a^b fg dx}_{=:B} \leq M \int_a^b g dx,$$

also $mA \leq B \leq MA$. Beachte: $A \geq 0$.
Fall 1: $A = 0$. Dann ist $B = 0$ und jedes $\mu \in [m, M]$ leistet das Verlangte.
Fall 2: $A > 0$. Es gilt: $m \leq \frac{B}{A} \leq M$. Nun leistet $\mu = \frac{B}{A}$ das Verlangte.

b) Mit $g = 1$ auf $[a,b]$ folgt die Behauptung aus a).

Der Zusatz folgt aus 7.7 und 7.11. □

Satz 10.18: *Es sei* (f_n) *eine Folge mit:*

i) $f_n \in C^1([a,b])$ $(n \in \mathbb{N})$,

ii) $(f_n(a))$ *ist konvergent,*

iii) (f_n') *konvergiert auf* $[a,b]$ *gleichmäßig gegen* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann konvergiert (f_n) *auf* $[a,b]$ *gleichmäßig und für*

$$f(x) \coloneqq \lim_{x\to\infty} f_n(x) \ (x \in [a,b])$$

gilt:

$$f \in C^1([a,b]) \text{ und } f'(x) = g(x) \ (x \in [a,b]).$$

Bemerkung: Satz 10.18 enthält wieder eine Aussage über das Vertauschen von Grenzwerten:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) = f'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' \quad (x \in [a,b]).$$

Beweis: Wir setzen $\alpha_n \coloneqq \int_a^b |f_n'(t) - g(t)| dt$ $(n \in \mathbb{N})$. Nach iii) folgt: $(|f_n' - g|)$ konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen 0. Damit folgt mit 10.8: $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Wir setzen $c := \lim_{n\to\infty} f_n(a)$. Für jedes $x \in [a,b]$ gilt:

$$f_n(x) \overset{10.6}{=} \underbrace{f_n(a)}_{\to c} + \int_a^x f_n'(t)dt \xrightarrow{10.8} c + \int_a^x g(t)dt =: f(x) \quad (n \to \infty).$$

Also: (f_n) konvergiert auf $[a,b]$ punktweise gegen f. Mit 8.3 a) folgt $g \in C([a,b])$, und nach 10.11 ist daher $f \in C^1([a,b])$ und $f' = g$ auf $[a,b]$.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - c - \int_a^x g(t)dt| \\
&\overset{10.6}{=} |\int_a^x (f_n'(t) - g(t))dt + f_n(a) - c| \\
&\leq \int_a^x |f_n'(t) - g(t)|dt + |f_n(a) - c| \\
&\leq \int_a^b |f_n'(t) - g(t)|dt + |f_n(a) - c| \\
&= \underbrace{\alpha_n + |f_n(a) - c|}_{\to 0} \quad (x \in [a,b]).
\end{aligned}$$

Mit 8.1 folgt: (f_n) konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f. □

Bemerkung: Der Beweis von 9.12 b) kann mit 8.2 und 10.18 geführt werden.

Kapitel 11

Uneigentliche Integrale

Vereinbarung: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so soll stets gelten: $f \in R(J)$ für jedes kompakte Intervall $J \subseteq I$.

Definition:

a) *Es sei $a \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < \beta$ und $f\colon [a, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*
Das ***uneigentliche Integral*** *$\int_a^\beta f(x)dx$ heißt* ***konvergent*** $:\iff$

$$\textit{Es existiert } \lim_{t \to \beta-} \int_a^t f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall:

$$\int_a^\beta f(x)dx := \lim_{t \to \beta-} \int_a^t f(x)dx.$$

b) *Es sei $b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\alpha < b$ und $f\colon (\alpha, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*
Das ***uneigentliche Integral*** *$\int_\alpha^b f(x)dx$ heißt* ***konvergent*** $:\iff$

$$\textit{Es existiert } \lim_{t \to \alpha+} \int_t^b f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall:

$$\int_\alpha^b f(x)dx := \lim_{t \to \alpha+} \int_t^b f(x)dx.$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt divergent.

Beispiele:

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx,\ \gamma > 0$ $(a = 1, \beta = \infty)$. Für $t > 1$ gilt:

$$\int_1^t \frac{1}{x^\gamma}dx = \begin{cases} \log t, & \text{falls } \gamma = 1 \\ \frac{1}{1-\gamma}(t^{1-\gamma} - 1), & \text{falls } \gamma \neq 1 \end{cases}$$

Also gilt: $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx$ konvergiert $\iff \gamma > 1$. In diesem Fall ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ $(a = 0, \beta = \infty)$. Für $t > 0$ gilt:

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan t \to \frac{\pi}{2} \ (t \to \infty).$$

Also ist $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ konvergent und $= \frac{\pi}{2}$.

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx,\ \gamma > 0$ $(\alpha = 0, b = 1)$. Wie in Beispiel a) sieht man:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx \text{ konvergiert} \iff \gamma < 1.$$

In diesem Fall ist

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx = \frac{1}{1-\gamma}.$$

d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$ $(\alpha = -\infty, b = 0)$. Wie in Beispiel b) sieht man:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ konvergiert und } = \frac{\pi}{2}.$$

e) $\int_0^\infty \sin x dx$ $(a = 0, \beta = \infty)$. Es sei $t_n = n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt: $t_n \to \infty$ und

$$\int_0^{t_n} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{t_n} = 1 - \cos t_n = 1 - \cos(n\pi) = 1 - (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist $\int_0^\infty \sin x dx$ divergent.

Definition: *Es sei $\alpha < \beta$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*
*Das **uneigentliche Integral** $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ heißt **konvergent** $:\iff$*

$$\exists c \in (\alpha, \beta): \int_\alpha^c f(x)dx \text{ und } \int_c^\beta f(x)dx \text{ sind konvergent }.$$

In diesem Fall:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx := \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$

Im anderen Fall heißt das Integral divergent.

Übung: Obige Definition ist unabhängig von $c \in (\alpha, \beta)$.

Beispiele:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ ist divergent, denn $\int_0^{\infty} x dx$ ist divergent.

b) Es sei $\gamma > 0$. Obige Beispiele a) und c) zeigen:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\gamma}} dx \text{ ist divergent.}$$

c) Obige Beispiele b) und d) zeigen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ist konvergent und } = \pi.$$

Die folgenden Definitionen und Sätze formulieren wir nur für uneigentliche Integrale der Form

$$\int_a^{\beta} f(x) dx.$$

Sie gelten sinngemäß auch für die beiden anderen Typen uneigentlicher Integrale.

Bemerkung: Für $t \in [a, \beta)$ sei $g(t) := \int_a^t f(x) dx$. Dann gilt:

$$\int_a^{\beta} f(x) dx \text{ konvergiert } \iff \lim_{t \to \beta-} g(t) \text{ existiert und ist in } \mathbb{R}.$$

D.h. die Konvergenz eines uneigentlichen Integrals ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Funktionenlimes.

Satz 11.1 (Cauchykriterium)**:** *Es gilt:*

$$\int_a^{\beta} f(x) dx \textit{ konvergiert} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists c \in (a, \beta) \ \forall u, v \in (c, \beta) : \left| \int_u^v f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Beweis: Folgt aus 6.2 c). □

Beispiel: Behauptung: $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert.

Beweis: Für $1 < u < v$ gilt:

$$\begin{aligned} |\int_u^v \frac{\sin x}{x} dx| &= |\int_u^v \underbrace{\frac{1}{x}}_{g} \underbrace{\sin x}_{f'} dx| \\ &= \left| \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_v^u - \int_u^v (-\frac{1}{x^2})(-\cos x) dx \right| \\ &= \left| \frac{\cos v}{v} - \frac{\cos u}{u} - \int_u^v \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \int_u^v \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{u}. \end{aligned}$$

Es sei $\varepsilon > 0$ und o.B.d.A $\varepsilon < 2$. Setze $c := \frac{2}{\varepsilon}$. Für $\frac{2}{\varepsilon} = c < u < v$ gilt nun:

$$|\int_u^v \frac{\sin x}{x} dx| \leq \frac{2}{u} < \varepsilon.$$

Mit 11.1 folgt die Behauptung. $\square$

Definition:

$$\int_a^\beta f(x)dx \textit{ heißt } \textbf{\textit{absolut konvergent}} :\Longleftrightarrow \int_a^\beta |f(x)|dx \textit{ ist konvergent.}$$

Beispiel: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ist nicht absolut konvergent (Übung).

Den folgenden Satz beweist man mit 11.1 ähnlich wie bei Reihen:

Satz 11.2:

a) Ist $\int_a^\beta f(x)dx$ absolut konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)dx$ konvergent und

$$|\int_a^\beta f(x)dx| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx.$$

b) ***Majorantenkriterium****: Ist $|f| \leq h$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta h(x)dx$ konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)dx$ absolut konvergent.*

c) ***Minorantenkriterium****: Ist $f \geq h \geq 0$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta h(x)dx$ divergent, so ist $\int_a^\beta f(x)dx$ divergent.*

Beispiele:

a) $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^5}}}_{=:f(x)} dx$. Für $x \geq 1$ gilt: $|f(x)| = f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} =: g(x)$.

$$\int_1^\infty g(x)dx \text{ konvergiert } \Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergiert.}$$

b) $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+7x}}_{=:f(x)} dx$. Es sei $g(x) := \frac{1}{x}$. Es gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2+7x} \to 1 \ (x \to \infty)$$

$$\Rightarrow \exists c \geq 1 \ \forall x \geq c: \ \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \forall x \geq c: \ f(x) \geq \frac{1}{2} g(x).$$

Weiter gilt:

$$\int_c^\infty \frac{1}{2} g(x) dx \text{ divergiert} \Rightarrow \int_c^\infty f(x) dx \text{ divergiert} \Rightarrow \int_1^\infty f(x) dx \text{ divergiert.}$$

Kapitel 12

Die komplexe Exponentialfunktion

Erinnerung (lineare Algebra): Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein Körper. Alle aus den Körperaxiomen hergeleiteten Formeln gelten daher auch in $\mathbb{C}$.

Beispiele:

a) Die Binomische Formel gilt in $\mathbb{C}$.

b) Die geometrische Summenformel gilt in $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad (z \in \mathbb{C},\ z \neq 1).$$

Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt **Betrag** von z.

$\overline{z} := x - iy$ heißt **komplex Konjugierte** von z.

$z \cdot \overline{z} = |z|^2$ $(z \in \mathbb{C})$.

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ $(z, w \in \mathbb{C})$.

$|z + w| \leq |z| + |w|$ $(z, w \in \mathbb{C})$.

Definition: *Die auf $\mathbb{C}$ definierte Funktion*

$$z = x + iy \mapsto e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$$

heißt ***komplexe Exponentialfunktion****.*

Ist $z = x \in \mathbb{R}$, so ist $e^z = e^x$; ist $z = it$ $(t \in \mathbb{R})$, so ist $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Satz 12.1: *Es gilt:*

a) $\forall z, w \in \mathbb{C}: \ e^{z+w} = e^z e^w$*;* $\forall z \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{Z}: \ e^{nz} = (e^z)^n$*.*

b) $\forall t \in \mathbb{R}: \ |e^{it}| = 1, \ e^{-it} = \overline{e^{it}}$*.*

c) $e^{i\pi} + 1 = 0$*.*

d) $\forall k \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{C}: \ e^{z+2k\pi i} = e^z$*.*

e) $\forall t \in \mathbb{R}: \ \cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right), \ \sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$*.*

Beweis:

a) Übung (mit den Additionstheoremen von E, sin, cos).

b)

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \Rightarrow |e^{it}| = (\cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos t - i \sin t = \overline{\cos t + i \sin t} = \overline{e^{it}}.$$

c) $e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$.

d) $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)) = e^z$.

e) $e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$, $e^{it} - e^{-it} = 2i \sin t$.

$\square$

Definition: *Für* $z \in \mathbb{C}$ *sei*

$$\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Übung: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z,$$
$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

Satz 12.2: *Es sei* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$*. Dann gilt:*

$$e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}: \ z = 2k\pi i.$$

Beweis: "$\Leftarrow$": Folgt aus 12.1 *d)*.
"$\Rightarrow$": Es sei $e^z = 1$, also

$$1 = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$\Rightarrow e^x \cos y = 1, e^x \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : y = j\pi.$$

Also ist $\cos y = (-1)^j$, somit $1 = e^x(-1)^j$ und daher $j = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und $x = 0$. Also gilt $z = 2k\pi i$. □

Aus 12.2 folgt:

$$\begin{aligned} e^z = e^w &\iff e^z e^{-w} = e^w e^{-w} \\ &\iff e^{z-w} = e^{w-w} = e^0 = 1 \\ &\overset{12.2}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} : z = w + 2k\pi i \end{aligned}$$

Polarkoordinaten: Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ und $z \neq 0$. Wir setzen

$$r := |z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Die Gerade durch 0 und z schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ein. Die Zahl φ heißt das **Argument von** z; $\arg z := \varphi$. Es gilt

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

also

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = re^{i\varphi} = |z|e^{i \arg z}.$$

Ist weiter $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\psi := \arg w$, so gilt:

$$zw = |z|e^{i\varphi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Satz 12.3 (Fundamentalsatz der Algebra)**:**
Es sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ *ein Polynom mit* $n \geq 1$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *und* $a_n \neq 0$. *Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *mit*

$$p(z) = a_n(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Insbesondere gilt:

$$p(z) = 0 \iff z \in \{z_1, \ldots, z_n\}.$$

Ohne Beweis.

Definition: *Es sei* $a \in \mathbb{C}$ *und* $n \in \mathbb{N}$. *Jedes* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $z^n = a$ *heißt eine* n***-te Wurzel aus*** a.

$$\sqrt[n]{a} \text{ bezeichnet eine } n\text{-te Wurzel aus } a.$$

Satz 12.4: *Es sei* $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $r := |a|$ *und* $\varphi := \arg a$ *(also* $a = |a|e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$*).* *Für* $k = 0, 1, \ldots, n-1$ *sei*

$$z_k := \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

Dann gilt:

a) $z_j \neq z_k$ *für* $j \neq k$.

b) z *ist eine* n*-te Wurzel aus* $a \iff z \in \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$.

Beweis:

a) Es seien $j, k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $k \geq j$. Ist

$$z_k = e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\varphi+2j\pi}{n}} = z_j,$$

so existiert ein $l \in \mathbb{Z}$ mit:

$$i\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = i\frac{\varphi + 2j\pi}{n} + 2l\pi i \Rightarrow \frac{\varphi}{2\pi n} + \frac{k}{n} = \frac{\varphi}{2\pi n} + \frac{j}{n} + l \Rightarrow \frac{k-j}{n} = l.$$

Somit ist

$$0 \leq l = \frac{k-j}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Wegen $l \in \mathbb{Z}$ folgt damit $l = 0$, also $k = j$.

b) Es sei $p(z) := z^n - a$. Dann gilt: z ist eine n-te Wurzel aus $a \iff p(z) = 0$. Weiter gilt

$$z_k^n = re^{i(\varphi+2k\pi)} = re^{i\varphi}e^{2k\pi i} = re^{i\varphi} = a \quad (k = 0, \ldots, n-1),$$

also $p(z_k) = 0$ $(k = 0, \ldots, n-1)$. Aus a) und 12.3 folgt die Behauptung.

□

Bezeichnung:
Ist $a = 1$, so heißen die Zahlen $z_0, \dots, z_{n-1}$ aus 12.4 die **n-ten Einheitswurzeln**. Diese sind also

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

Bemerkung: Insbesondere gilt:

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{\frac{2k\pi i}{n}}) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Beispiele:

a) Die 4. Einheitswurzel sind $1, -1, i, -i$.

b) Die 4. Wurzeln aus 16 sind $2, -2, 2i, -2i$.

c) Im Reellen ist $\sqrt{4} = 2$. Im Komplexen sind 2 und -2 die Wurzeln aus 4.

Beispiel: $\sqrt{-3 + 4i} = ?$ Man kann Wurzeln auf verschiedene Weisen berechnen:

1. Möglichkeit: $w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$. Dann gilt:

$$w^2 = u^2 - v^2 + 2iuv = -3 + 4i \iff u^2 - v^2 = -3,\ 2uv = 4.$$

   Löse das Gleichungssystem.

2. Möglichkeit: $z = -3 + 4i$. Bestimme $|z|$ und $\arg z$. Dann sind

$$\pm\sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg z}{2}} \text{ die Wurzeln von } z.$$

3. Möglichkeit: Ist $z \in (-\infty, 0]$, so sind $w = \pm i\sqrt{-z}$ die Wurzeln von z.
   Behauptung: Ist $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, so sind

$$w = \pm\sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||}$$

   die Wurzeln von z.

Beweis: Es gilt:

$$\left(\pm\sqrt{|z|}\frac{z+|z|}{|z+|z||}\right)^2 = |z|\frac{(z+|z|)(z+|z|)}{(z+|z|)(\overline{z}+|z|)} = |z|\frac{(z+|z|)}{(\overline{z}+|z|)}$$
$$= \frac{(|z|z+z\overline{z})}{(\overline{z}+|z|)} = z\frac{(|z|+\overline{z})}{(\overline{z}+|z|)} = z.$$

□

Also gilt:

$$\sqrt{-3+4i} = \pm\sqrt{5}\frac{-3+4i+5}{|-3+4i+5|} = \pm\sqrt{5}\frac{2+4i}{\sqrt{20}} = \pm(1+2i).$$

Satz 12.5: *Es seien $p, q \in \mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$z^2 + pz + q = 0 \iff z = -\frac{p}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}_{\textit{doppeldeutig!}}.$$

Beweis: "⇐" nachrechnen. Rest mit 12.3. □

Beispiel 12.6: Löse $(*)$ $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$.

$$z = \frac{2i-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(2i-1)^2}{4} + 2i} = i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-4-4i+1}{4} + 2i}$$
$$= i - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3-4i+8i} = i - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3+4i}.$$

Also sind

$$z_1 = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+2i) = 2i \text{ und } z_2 = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1-2i) = -1$$

die Lösungen von $(*)$. Es gilt

$$z^2 + (1-2i)z - 2i = (z-z_1)(z-z_2) = (z-2i)(z+1).$$

Definition: *Es sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$ heißt ein* ***Logarithmus von*** *w.*

Satz 12.7: *Es sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r = |w|$ und $\varphi = \arg w$, also $w = re^{i\varphi}$. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$z \text{ ist ein Logarithmus von } w \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \underbrace{\log |w|}_{\log \ in\ \mathbb{R}} + i\varphi + 2k\pi i.$$

Beweis: "$\Leftarrow$": Es gilt

$$e^z = e^{\log |w|} e^{i\varphi} e^{2k\pi i} = |w| e^{i\varphi} = w.$$

"$\Rightarrow$": Es sei $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ und $w = e^z = e^x e^{iy}$. Dann gilt $|w| = e^x \Rightarrow x = \log |w|$. Weiter ist

$$|w| e^{i\varphi} = w = e^z = e^x e^{iy} = |w| e^{iy}$$

$$\Rightarrow e^{i\varphi} = e^{iy} \;\Rightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} : \; iy = i\varphi + 2k\pi i.$$

Also gilt $z = \log |w| + i\varphi + 2k\pi i$. $\square$

Beispiele:

a) $w = -1$; $|w| = 1$, $\arg w = \pi$. Alle Logarithmen von -1:

$$i\pi + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $w = 1$; $|w| = 1$, $\arg w = 0$. Alle Logarithmen von 1:

$$2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $w = 1 + i$; $|w| = \sqrt{2}$, $\arg w = \frac{\pi}{4}$. Alle Logarithmen von $1 + i$:

$$\log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kapitel 13

Fourierreihen

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Eigenschaft

$$(V) \quad \begin{cases} f \in R([-\pi, \pi]) \text{ und } f \text{ ist auf } \mathbb{R} \text{ } 2\pi\text{-periodisch,} \\ \text{d.h. } f(x+2\pi) = f(x) \ (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Definition: *Es seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Eine Reihe der Form*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

heißt eine ***trigonometrische Reihe*** *(TR).*

Fragen: Wann ist f mit der Eigenschaft (V) durch eine trigonometrische Reihe darstellbar? Wie hängt dann f mit (a_n) und (b_n) zusammen?

Satz 13.1: *Es gilt:*

a) *Die Funktion f erfülle (V). Dann gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$:*

$$f \in R([a, a+2\pi]) \text{ und } \int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

b) ***Orthogonalitätsrelationen***: *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)dx = 0$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} \pi, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}.$$

Beweis: a) Übung.
b) Die Funktion $x \mapsto \sin(nx)\cos(kx)$ ist ungerade. Damit folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)dx = 0.$$

Rest: Übung. □

Motivation: Es seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen und es gelte

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wobei diese trigonometrisch Reihe auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent sei.
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$f(x)\sin(kx) = \frac{a_0}{2}\sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx)\sin(kx) + b_n \sin(nx)\sin(kx)) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Übung: Die letzte Reihe konvergiert auf $\mathbb{R}$ ebenfalls gleichmäßig.
Mit 10.8 folgt daher:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx &= \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(kx)dx}_{\overset{13.1}{=}0} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)dx}_{\overset{13.1}{=}\begin{cases}\pi, & \text{falls } k=n\\ 0, & \text{falls } k\neq n\end{cases}} \\ &= b_k\pi.\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \; b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

Analog zeigt man:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0: \; a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx.$$

Definition: *Die Funktion f erfülle (V). Setze*

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

und

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

*Die Zahlen a_n, b_n heißen die **Fourierkoeffizienten** (FK) von f und die mit a_n und b_n gebildete trigonometrische Reihe heißt die zu f gehörenden **Fourierreihe**. Man schreibt:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Frage: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die zu f gehörige Fourierreihe, und wogegen?

Satz 13.2: *Für f gelte (V).*

a) Ist f gerade, also $f(x) = f(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$, so gilt für die Fourierkoeffizienten von f:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \ (n \in \mathbb{N}_0) \text{ und } b_n = 0 \ (n \in \mathbb{N}).$$

b) Ist f ungerade, also $f(x) = -f(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$, so gilt für die Fourierkoeffizienten von f:

$$a_n = 0 \ (n \in \mathbb{N}_0) \text{ und } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \ (n \in \mathbb{N}).$$

Beweis: Übung. □

Definition: *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D und $g\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir setzen*

$$g(x_0\pm) := \lim_{x \to x_0\pm} g(x), \text{ falls dieser Grenzwert vorhanden und} \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

Definition: *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch. Die Funktion f heißt **stückweise glatt** $:\Longleftrightarrow$ es existiert eine Zerlegung $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ von $[-\pi, \pi]$ (also $-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \pi$) mit:*

i) $f \in C^1\left((t_{j-1}, t_j)\right)$ $(j = 1, \ldots, n)$.

ii) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existieren die Grenzwerte:*

$$f(x-),\ f'(x-),\ f(x+),\ f'(x+).$$

In diesem Fall setzen wir

$$s_f(x) := \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Beachte in obiger Definition:

a) In den Punkten t_j muss f nicht stetig sein.

b) f hat die Eigenschaft (V), vgl. 10.16 a).

Satz 13.3: *Die Funktion f sei 2π-periodisch und stückweise glatt. Dann konvergiert die Fourierreihe von f in jedem $x \in \mathbb{R}$ gegen $s_f(x)$. Ist in diesem Fall f in $x \in \mathbb{R}$ stetig, so konvergiert die Fourierreihe von f also gegen $f(x)$.*

Ohne Beweis.

Beispiel 13.4: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch und auf $(-\pi, \pi]$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = \pi \end{cases}.$$

Es gilt: f ist stückweise glatt und $s_f(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Weiter ist f ist ungerade. Nach 13.2 ist also $a_n = 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx \overset{10.16}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \overset{\text{Übung}}{=} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mit 13.3 folgt nun:

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad (x \in (-\pi, \pi)).$$

Mit $x = \frac{\pi}{2}$ folgt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots,$$

vgl. 9.17 b).

Beispiel 13.5: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch und auf $[-\pi, \pi]$ definiert durch $f(x) = x^2$. Es gilt: f ist stückweise glatt, f ist gerade und $f(x) = s_f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Nach 13.2 ist also $b_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3}, & n = 0 \\ 4\frac{(-1)^n}{n^2}, & n \geq 1 \end{cases}.$$

Mit 13.3 folgt:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - + \dots\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - + \dots\right) \; (x \in [-\pi, \pi]).$$

Hieraus erhalten wir:

$$x = 0: \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \dots = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \tag{1}$$

$$x = \pi: \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \tag{2}$$

Addition von (1), (2) liefert:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Satz 13.6: *Es sei $f \in C(\mathbb{R})$ und f sei 2π-periodisch und stückweise glatt. Dann gilt:*

a) Die Fourierreihe von f konvergiert in jedem $x \in \mathbb{R}$ absolut.

b) Die Fourierreihe von f konvergiert auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f.

c) Sind a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von f, so konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \text{ und } \sum_{n=1}^\infty b_n \text{ absolut.}$$

Ohne Beweis.

Satz 13.7: *Die Funktion f erfülle (V), und a_n, b_n seien ihre Fourierkoeffizienten. Dann gilt:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ *ist konvergent.*

b) $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$ *(Besselsche Ungleichung).*

c) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-\pi, \pi]$ sei

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - s_n(x))^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)^2 - 2f(x)s_n(x) + s_n(x)^2)dx \\ &\underset{\text{nachr.}}{\overset{13.1}{=}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right), \end{aligned}$$

also

$$\alpha_n := \frac{a_0^2}{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)}_{=:\beta_n} \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx =: \alpha.$$

Die Folge (α_n) ist monoton wachsend und beschränkt, somit ist (α_n) konvergent. Damit ist (β_n) konvergent und es folgt a).
Aus $\alpha_n \leq \alpha$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt b).
Aus a) und 3.1 folgt $a_n^2 + b_n^2 \to 0$. Damit gilt $a_n^2 \to 0$, $b_n^2 \to 0$ und hieraus folgt c). □

Kapitel 14

Der Raum $\mathbb{R}^n$

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Erinnerung (lineare Algebra):

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^n$ ist mit der bekannten Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $\dim \mathbb{R}^n = n$.
Die Vektoren

$$e_1 := (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,\ e_n := (0, \ldots, 0, 1)$$

heißen **Einheitsvektoren**; $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Definition: *Es seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.*

*a) Die Zahl $xy := x \cdot y := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ heißt **Skalarprodukt** oder **Innenprodukt** von x und y.*

*b) Die Zahl $\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ heißt **Norm** oder **Länge** von x. Beachte: $\|x\|^2 = x \cdot x$. Im Fall $n = 1$ ist $\|x\| = |x|$.*

*c) Die Zahl $\|x - y\|$ heißt **Abstand** von x und y. Beachte: $\|x - y\| = \|y - x\|$.*

Beispiele:

a) $(1, 2, -1) \cdot (1, 3, 4) = 1 + 6 - 4 = 3$.

b) $\|(1, 2, -1)\| = (1 + 4 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$.

c) $\|e_j\| = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Satz 14.1: *Es seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

a) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, $x \cdot y = y \cdot x$.

b) $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y)$.

c) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0 = (0, \ldots, 0)$.

d) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

e) $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ *(**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** (CSU)).*

f) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(**Dreiecksungleichung**).*

g) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

h) $\forall j \in \{1, \ldots, n\} : \ |x_j| \leq \|x\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$.

Beweis: a) - d): Nachrechnen.

e) O.B.d.A. sei $y \neq 0$, also $\|y\| > 0$. Es sei $A := \|x\|^2 = x \cdot x$, $B := x \cdot y$, $C := \|y\|^2 = y \cdot y$ und $\alpha := \frac{B}{C}$. Dann gilt:

$$0 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - \alpha y_j)^2 = \sum_{j=1}^n \left(x_j^2 - 2\alpha x_j y_j + \alpha^2 y_j^2 \right)$$
$$= A - 2\alpha B + \alpha^2 C = A - 2\frac{B^2}{C} + \frac{B^2}{C} = A - \frac{B^2}{C}$$
$$\Rightarrow B^2 \leq AC \Rightarrow (x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

f) Es gilt:

$$\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \overset{e)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

g) Übung.

h) Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$|x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |x_j| \leq \|x\|.$$

Weiter gilt:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \Rightarrow \|x\| \overset{d),f)}{\leq} |x_1|\|e_1\| + \ldots |x_n|\|e_n\| = |x_1| + \ldots + |x_n|.$$

$\square$

Definition: *Es seien $l, m, n \in \mathbb{N}$ und*

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine reelle $m \times n$-Matrix.

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \textit{heißt } \boldsymbol{Norm\ von}\ A.$$

Es sei B eine reelle $n \times l$-Matrix (dann existiert AB). Es gilt (Übung):

$$(*) \qquad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Es sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$Ax \coloneqq A \cdot x^\top = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\textbf{\textit{Matrix-Vektorprodukt}})$$

Aus $(*)$ folgt:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

Definition: *Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$.*

*a) $U_\varepsilon(x_0) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ heißt **offene Kugel um** x_0 **mit Radius** ε, oder auch ε-**Umgebung von** x_0.*

b) $\overline{U_\varepsilon(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$ *heißt* ***abgeschlossene Kugel um*** x_0 ***mit Radius*** ε*.*

Definition: *Es sei* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*.*

a) A *heißt* ***beschränkt*** $:\iff \exists c \geq 0\ \forall a \in A:\ \|a\| \leq c.$

b) A *heißt* ***offen*** $:\iff \forall a \in A\ \exists \varepsilon = \varepsilon(a) > 0:\ U_\varepsilon(a) \subseteq A.$

c) A *heißt* ***abgeschlossen*** $:\iff \mathbb{R}^n \setminus A$ *ist offen.*

d) A *heißt* ***kompakt*** $:\iff$ A *ist beschränkt und abgeschlossen.*

Beispiele:

a) Offene Kugeln sind offen, abgeschlossene Kugeln sind nicht offen.

b) $\mathbb{R}^n$ ist offen, $\emptyset$ ist offen, $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, $\emptyset$ ist abgeschlossen.

c) Abgeschlossene Kugeln sind kompakt.

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ ist nicht beschränkt, also auch nicht kompakt. A ist nicht offen, aber A ist abgeschlossen.

e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x > 0\}$ ist nicht offen und auch nicht abgeschlossen.

Stichwortverzeichnis