Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Offensichtlich besitzen alle drei Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ stetige partielle Ableitungen und sind damit auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.
Für f mit den Komponentenfunktionen $f_1(x,y) := x^2$ und $f_2(x,y) := y^2$ gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} (f_1)_x(x,y) & (f_1)_y(x,y) \\ (f_2)_x(x,y) & (f_2)_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

und ebenso ergibt sich

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2 & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x,y) = g'\big(f(x,y)\big)\cdot f'(x,y) &= \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Für die Ableitung der Funktion $h\circ g$ erhält man

$$\begin{aligned}(h\circ g)'(x,y) = h'\big(g(x,y)\big)\cdot g'(x,y) &= \begin{pmatrix} e^{x+y} & \sin(xy) \\ 2 & 0 \\ 0 & e^{e^{x+y}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{x+y}\big(y\cos(xy)+\sin(xy)\big) & e^{x+y}\big(x\cos(xy)+\sin(xy)\big) \\ 2y\cos(xy) & 2x\cos(xy) \\ e^{x+y}e^{e^{x+y}} & e^{x+y}e^{e^{x+y}} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wegen

$$(g\circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x^2,y^2) = \big(\sin(x^2y^2),\, e^{x^2+y^2}\big) =: \big(u_1(x,y), u_2(x,y)\big)$$

erhalten wir

$$(g\circ f)'(x,y) = \begin{pmatrix} (u_1)_x(x,y) & (u_1)_y(x,y) \\ (u_2)_x(x,y) & (u_2)_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$(h\circ g)(x,y) = h\big(\sin(xy),\, e^{x+y}\big) = \big(\sin(xy)e^{x+y}, 2\sin(xy), e^{e^{x+y}}\big) =: \big(v_1(x,y), v_2(x,y), v_3(x,y)\big)$$

und für die Ableitung von $h\circ g$ ergibt sich

$$(h\circ g)'(x,y) = \begin{pmatrix} (v_1)_x(x,y) & (v_1)_y(x,y) \\ (v_2)_x(x,y) & (v_2)_y(x,y) \\ (v_3)_x(x,y) & (v_3)_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y}\big(y\cos(xy)+\sin(xy)\big) & e^{x+y}\big(x\cos(xy)+\sin(xy)\big) \\ 2y\cos(xy) & 2x\cos(xy) \\ e^{x+y}e^{e^{x+y}} & e^{x+y}e^{e^{x+y}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion g ist stetig differenzierbar, es gilt $g(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$ und die Matrix $Dg(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ ist regulär. Wir überprüfen diese Voraussetzungen: Die Funktion g ist stetig differenzierbar, weil alle partiellen Ableitungen von g stetig sind (vgl. $(*)$). Weiter ist

$$g(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2)\, \cos\frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2)\, \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x\, \cos y & -\cosh x\, \sin y \\ \cosh x\, \sin y & \sinh x\, \cos y \end{pmatrix}, \tag{$*$}$$

und damit ist

$$g'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

regulär, denn $\det Dg(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = \cosh^2(\ln 2) \neq 0$ wegen $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gilt

$$(g^{-1})'(0, \tfrac{3}{4}) = \big(Dg(g^{-1}(0, \tfrac{3}{4}))\big)^{-1} = \big(Dg(\ln 2, \tfrac{\pi}{2})\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar (siehe **a)**) und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\det g'(x,y) = (\sinh x\, \cos y)^2 + (\cosh x\, \sin y)^2 .$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x\, \cos y = 0$ und $\cosh x\, \sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies wegen $\sinh x \neq 0$ und $\cosh x \neq 0$ gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $Dg(x,y)$ stets regulär. Der Umkehrsatz liefert nun die lokale Invertierbarkeit von g in jedem Punkt $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Trotzdem ist die Funktion g auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ nicht injektiv wegen $g(x, y + 2\pi) = g(x,y)$ für $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

a) Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$. Dann ist f auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar mit

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3yz + 3x^2 & -3xz - 3y^2 & 3z^2 + 4z - 3xy \end{pmatrix},$$

also $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 4z - 3xy$. Die Auflösbarkeit der Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach z in einer Umgebung von $(0,0,-2)$ folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn

$$f(0,0,-2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) \neq 0$$

erfüllt sind. Es gilt $f(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung von g gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\big(x,y,g(x,y)\big)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\big(x,y,g(x,y)\big) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 4g(x,y) - 3xy} \begin{pmatrix} -3yg(x,y) + 3x^2 & -3xg(x,y) - 3y^2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

b) Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0,0,1,1)$ durch die Gleichung

$$f(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \quad f(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} x^2+y^2-u^2+v^2 \\ x^2+2y^2-3u^2+4v^2-1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $f(0,0,1,1) = \vec{0}$ gilt; die ersten beiden Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ regulär ist. Wegen

$$Df(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad \frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn $\det\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right) = -4 \neq 0$.

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt. Danach gibt es offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$, $V \subset \mathbb{R}^2$ von $(1,1)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to V$ mit $g(0,0) = (1,1)$ und $f(x,y,g(x,y)) = \vec{0}$ für alle $(x,y) \in U$. Definiert man u als die erste Komponentenfunktion von g und v als die zweite Komponentenfunktion von g, dann leisten $u,v\colon U \to \mathbb{R}$ das Gewünschte. Außerdem ergibt für sich für $(x,y) \in U$

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\left(\tfrac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \tfrac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y)) \\ &= -\left(\tfrac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,u(x,y),v(x,y))\right)^{-1} \tfrac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,u(x,y),v(x,y)) \\ &= -\begin{pmatrix} -2u(x,y) & 2v(x,y) \\ -6u(x,y) & 8v(x,y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere für $(x,y) = (0,0)$ ist der zweite Faktor die Nullmatrix, so dass dann

$$g'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Dies bedeutet, dass $u_x(0,0) = u_y(0,0) = v_x(0,0) = v_y(0,0)$ gilt.

Dieses Ergebnis kann man auch folgendermaßen herleiten: Bilden wir in den beiden Gleichungen $x^2+y^2-u^2+v^2 = 0$ und $x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach x, wobei wir $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_x(0,0) + 2v_x(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_x(0,0) + 8v_x(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_x(0,0) = v_x(0,0) = 0$.

Um die partiellen Ableitungen nach y der implizit definierten Funktionen $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ zu berechnen, gehen wir analog wie eben vor. Wir bilden in beiden Gleichungen $x^2+y^2-u^2+v^2 = 0$ und $x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach y und erhalten

$$2y - 2uu_y + 2vv_y = 0 \qquad \text{und} \qquad 4y - 6uu_y + 8vv_y = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_y(0,0) + 2v_y(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_y(0,0) + 8v_y(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_y(0,0) = v_y(0,0) = 0$.