Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Das Taylorpolynom zweiten Grades von f in $x^0 = (1, -1, 0)$ ist gegeben durch

$$T_{2,x^0}(h) = f(x^0) + \nabla f(x^0) \cdot h + \tfrac{1}{2} h^T H_f(x^0) h .$$

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$f_x(x, y, z) = e^z , \qquad f_y(x, y, z) = -2y , \qquad f_z(x, y, z) = xe^z .$$

Damit erhalten wir $f_x(1, -1, 0) = 1$, $f_y(1, -1, 0) = 2$ und $f_z(1, -1, 0) = 1$. Weiter gilt

$$f_{xx} = 0 , \quad f_{xy} = 0 , \quad f_{xz} = e^z , \quad f_{yy} = -2 , \quad f_{yz} = 0 , \quad f_{zz} = xe^z .$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(x^0) = 0 , \qquad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad H_f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Folglich ist

$$T_{2,x^0}(h_1, h_2, h_3) = 0 + h_1 + 2h_2 + h_3 + \tfrac{1}{2}\big(-2h_2^2 + h_3^2 + 2h_1 h_3\big) = h_1 + 2h_2 + h_3 - h_2^2 + \tfrac{1}{2} h_3^2 + h_1 h_3 .$$

Schreibt man $h = (x, y, z) - x^0 = (x - 1, y + 1, z)$, so erhält man

$$(x - 1) + 2(y + 1) + z - (y + 1)^2 + \tfrac{1}{2} z^2 + (x - 1)z .$$

b) Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \cos(x)\, \sin(y)\, e^{x-y}$, gilt

$$\begin{array}{lllll}
f(x,y) & = e^{x-y} \cos x \sin y & \Rightarrow & f(0,0) & = 0 \\
f_x(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \sin y - \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_x(0,0) & = 0 \\
f_y(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \cos y - \cos x \sin y) & \Rightarrow & f_y(0,0) & = 1 \\
f_{xx}(x,y) & = e^{x-y}(-2 \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) & = 0 \\
f_{xy}(x,y) & = e^{x-y}(\sin x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) & = 1 \\
f_{yy}(x,y) & = e^{x-y}(-2 \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) & = -2 \\
f_{xxx}(x,y) & = e^{x-y}(-2 \cos x \sin y - 2 \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxx}(0,0) & = 0 \\
f_{xxy}(x,y) & = e^{x-y}(-2 \sin x \cos y + 2 \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxy}(0,0) & = 0 \\
f_{xyy}(x,y) & = e^{x-y}(2 \sin x \cos y - 2 \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xyy}(0,0) & = -2 \\
f_{yyy}(x,y) & = e^{x-y}(2 \cos x \sin y + 2 \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yyy}(0,0) & = 2
\end{array}$$

Damit ist für $h = (h_1, h_2)$

$$\begin{aligned}
T_{3,(0,0)}(h) &= f(0,0) + \tfrac{1}{1!}\,(h \cdot \nabla) f(0,0) + \tfrac{1}{2!}\,(h \cdot \nabla)^2 f(0,0) + \tfrac{1}{3!}\,(h \cdot \nabla)^3 f(0,0) \\
&= f(0,0) + \sum_{j=1}^{2} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0,0) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2} h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(0,0) + \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^{2} h_j h_k h_l \frac{\partial^3 f}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_l}(0,0) \\
&= 0 + h_2 + \tfrac{1}{2}\big(h_1 h_2 + h_2 h_1 + h_2^2(-2)\big) + \tfrac{1}{6}\big(h_1 h_2 h_2(-2) + h_2 h_1 h_2(-2) + h_2 h_2 h_1(-2) + h_2^3 2\big) \\
&= h_2 + h_1 h_2 - h_2^2 - h_1 h_2^2 + \tfrac{1}{3}\, h_2^3 .
\end{aligned}$$

Schreiben wir $(x, y) = h + x^0 = h$, so erhalten wir

$$T_{3,(0,0)}(x, y) = y + xy - y^2 - xy^2 + \tfrac{1}{3}\, y^3 .$$

Aufgabe 2

a) **i)** Offenbar gilt $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Man erhält also alle Kandidaten für lokale Extremstellen durch Nullsetzen des Gradienten und kann sie dann mit Hilfe der Hessematrix genauer untersuchen.

Der Gradient von f lautet $\operatorname{grad} f(x,y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)$. Die erste Komponente ist Null genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die stationären Punkte sind also $(0,0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0,0)$ indefinit. (Alternative Begründung: $\det H_f(0,0) = -9 < 0$.) Deshalb hat f in $(0,0)$ einen Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. (Alternativ: $6 > 0$ und $\det H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 27 > 0$.) Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

ii) Zweimalige Anwendung der Kettenregel zeigt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Gradient von f lautet

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6x + y^2 \\ 2xy - 2y \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die zweite Komponente von $\operatorname{grad} f(x,y)$ verschwindet genau dann, wenn $y(x-1) = 0$ gilt, also wenn $y = 0$ oder $x = 1$ ist.

Im Fall $y = 0$ ergibt sich für die erste Komponente $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Genau für $x = 0$ oder $x = 2$ ist diese Null.

Im Fall $x = 1$ ergibt sich für die erste Komponente $3 - 6 + y^2 = -3 + y^2$. Genau für $y = \sqrt{3}$ oder $y = -\sqrt{3}$ ist diese Null.

Damit sind $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,\sqrt{3})$, $(1,-\sqrt{3})$ alle kritischen Punkte von f.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 6 & 2y \\ 2y & 2x - 2 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $-6, -2$ und ist somit negativ definit. Daher besitzt f in $(0,0)$ ein lokales Maximum mit $f(0,0) = 0$.

$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $6, 2$ und ist somit positiv definit. Daher besitzt f in $(2,0)$ ein lokales Minimum mit $f(2,0) = -4$.

$H_f(1,\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil $\det H_f(1,\sqrt{3}) = -12 < 0$ gilt. Daher liegt in $(1,\sqrt{3})$ ein Sattelpunkt von f vor.

$H_f(1,-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil $\det H_f(1,-\sqrt{3}) = -12 < 0$ gilt. Daher liegt in $(1,-\sqrt{3})$ ein Sattelpunkt von f vor.

b) Da Q abgeschlossen und beschränkt ist und f auf Q stetig ist, nimmt f auf Q Maximum und Minimum an.

Wir betrachten f zunächst im Inneren von Q, also auf $(0,5) \times (0,5)$. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - 4y - 4x \\ x^2 - 4x + 4 \end{pmatrix}.$$

Gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$, so liefert die zweite Komponente $(x-2)^2 = 0$, d.h. $x = 2$. Für $x = 2$ lautet die erste Komponente -8. Diese ist stets $\neq 0$, so dass es keine kritischen Punkte von f gibt. Daher besitzt f keine lokalen Extremstellen in $(0,5)\times(0,5)$ und die Extrema von f werden auf dem Rand von Q angenommen. Wir untersuchen f auf dem Rand von Q:

$x = 0$: $f(0,y) = 4y - 2$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(0,5) = 18$ und minimal für $y = 0$ mit $f(0,0) = -2$.

$x = 5$: $f(5,y) = 9y - 52$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(5,5) = -7$ und minimal für $y = 0$ mit $f(5,0) = -52$.

$y = 0$: $f(x,0) = -2x^2 - 2 =: g_1(x)$. Wegen $g_1'(x) = -4x \leqslant 0$ für $x \in [0,5]$ ist g_1 auf $[0,5]$ monoton fallend. Daher sind 0 und 5 die Extremstellen von $g_1 = f(\cdot,0)$ mit $f(0,0) = -2$ und $f(5,0) = -52$.

$y = 5$: $f(x,5) = 3x^2 - 20x + 18 =: g_2(x)$. Wegen $g_2'(x) = 6x - 20 = 0 \iff x = \frac{10}{3} \in (0,5)$ müssen wir $f(0,5) = 18$, $f(\frac{10}{3},5) = -\frac{46}{3}$ und $f(5,5) = -7$ berücksichtigen.

Insgesamt erhalten wir durch Vergleich der Funktionswerte

$$\max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = 18 \qquad \text{und} \qquad \min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = -52.$$

Aufgabe 3

Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates

$$f(x,y) := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 .$$

Die Nebenbedingung ist durch die Kreislinie

$$h(x,y) := x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$$

gegeben. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte

$$\operatorname{rg} Dh(x,y) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2(y+1) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 1$$

überprüft werden. Diese Bedingung ist nur im Punkt $(1,-1)$ (Kreismittelpunkt) nicht erfüllt, der wegen $h(1,-1) = -1$ nicht auf der Kreislinie liegt und somit nicht Extremalkandidat ist.
Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda h(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 + \lambda\big((x-1)^2 + (y+1)^2 - 1\big)$$

und die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq -1$. Daher erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \iff x = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \qquad \text{und} \qquad y(2+2\lambda) = 2 - 2\lambda \iff y = -\frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

Also ist $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $2x^2 - 4x + 1 = 0$, also

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und damit} \qquad y_{1,2} = -x_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich sind $P_1 := (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_2 := (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ Kandidaten für Extrema. Da Maximum und Minimum der stetigen Funktion f auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(P_1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt P_1 der maximale Abstand $1 + 2\sqrt{2}$ und im Punkt P_2 der minimale Abstand $2\sqrt{2} - 1$ angenommen.

Aufgabe 4

Da die Menge S beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$h(x,y,z) := \begin{pmatrix} h_1(x,y,z) \\ h_2(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x,y,z) = (0,0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von f auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl f als auch h sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$Dh(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

gilt $\operatorname{rg} Dh(x,y,z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch die Nebenbedingungen $h_1(x,y,z) = 0$ und $h_2(x,y,z) = 0$ nicht erfüllen, denn aus $x+y+z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ im Widerspruch zu $x^2+y^2+z^2 = 1$. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 h_1(x,y,z) + \lambda_2 h_2(x,y,z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x+y+z) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\operatorname{grad} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0\,,$$
$$x+y+z = 0\,, \qquad x^2+y^2+z^2-1 = 0\,.$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x+y+z) = 0\,,$$

wegen $x+y+z = 0$ also $\lambda_1 = -1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4 + 2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y = 0$ folgt. Aus $x+y+z = 0$ ergibt sich dann $z = -x$ und in $x^2+y^2+z^2 = 1$ eingesetzt folgt $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right).$$

Die Funktionswerte dort sind $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = 4\sqrt{2}$ bzw. $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = -4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge S das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.