Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2018
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion f ist auf der Menge B stetig. Da B abgeschlossen und beschränkt ist, besitzt f auf B sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.
Wir betrachten zuerst alle Punkte im Inneren von B, in denen f differenzierbar ist. Das sind alle $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \in (0, 1)$. Nimmt f an solch einer Stelle ein lokales Extremum an, so muss gelten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \nabla f(\vec{v}) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \begin{pmatrix} (z^2-1)x \\ (z^2-1)y \\ 2z\|\vec{v}\|^2 + z^3 - z \end{pmatrix}.$$

Wegen $z^2 < 1$ sind die ersten beiden Zeilen genau für $x = y = 0$ erfüllt. Mit diesen Werten von x und y ist $\|\vec{v}\|^2 = z^2$ und damit $2z\|\vec{v}\| + z^3 - z = z(3z^2 - 1)$. Also gilt die dritte Zeile genau für $z = 1/\sqrt{3}$ oder $z = -1/\sqrt{3}$ (Beachte: $x = y = z = 0$ wird in diesem Fall nicht berücksichtigt). Daher müssen wir im Inneren die Punkte $(0, 0, 1/\sqrt{3})$ und $(0, 0, -1/\sqrt{3})$ untersuchen sowie den Nullpunkt, den wir zuvor ausgeschlossen haben:

$$f(0,0,0) = 0, \qquad f(0,0,-1/\sqrt{3}) = f(0,0,1/\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Nun bleibt noch der Rand ∂B von B zu untersuchen. Dort gilt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und damit $f(x, y, z) = (z^2 - 1) =: g(z)$ für $z \in [-1, 1]$. Wir sehen sofort, dass die Funktion g für $z = -1$ oder $z = 1$ ihr Maximum 0 und für $z = 0$ ihr Minimum -1 annimmt, welche damit auch die Extrema von f auf dem Rand von B sind. Es folgt: -1 ist das Minimum von f auf B und 0 das Maximum.
Ohne die Vereinfachung könnten wir auch folgendermaßen vorgehen:
Ist $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$, definiert, so gilt $\partial B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h(x, y, z) = 0\}$. Wir berechnen die Extrema von f auf ∂B unter Verwendung der Multiplikatorenregel von Lagrange: h ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, f hingegen nur auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, allerdings erfüllt $\vec{0}$ die Nebenbedingung $h(\vec{0}) = 0$ nicht. Weiter gilt $h'(x, y, z) = (2x \;\; 2y \;\; 2z)$, damit ist $\operatorname{rg} h'(x, y, z) = 1$ für alle $(x, y, z) \in \partial B$. Setzen wir $L(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) + \lambda h(x, y, z)$, so gibt es nach der Multiplikatorenregel von Lagrange für jeden Punkt $\vec{v}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, in dem f ein Extremum auf ∂B hat, ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} f_x + \lambda_0 h_x \\ f_y + \lambda_0 h_y \\ f_z + \lambda_0 h_z \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_0^2 - 1)x_0/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 x_0 \\ (z_0^2 - 1)y_0/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 y_0 \\ 2z_0\|\vec{v}_0\| + (z_0^3 - z_0)/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda_0 z_0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem in x_0, y_0, z_0, λ_0 muss man nun lösen. Die globalen Extrema erhält man durch Vergleich der Funktionswerte an den Punkten (x_0, y_0, z_0), die das Gleichungssystem erfüllen.

Aufgabe 2

a) Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Da S abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt f auf S Maximum und Minimum an. Zu deren Bestimmung verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange: Ist

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; h(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

definiert, dann gilt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ h(x, y) = 0\}$ sowie

$$h'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{rg} h'(x, y) < 1$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für $(x, y) \in S$ nicht vorkommt. Also gilt $\operatorname{rg} h'(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in S$.

Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ L(x, y, \lambda) = x + xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Dann gilt

$$\operatorname{grad} L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + y + 2\lambda x \\ x + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{grad} L(x, y, \lambda) = \vec{0}$ ist äquivalent zu:

$$1 + y + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$
$$x + 2\lambda y = 0 \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

1. Fall: $y = 0$. Dann folgt aus Gleichung (2): $x = 0$; jedoch genügt $(x, y) = (0, 0)$ der Gleichung (3) nicht.

2. Fall: $y \neq 0$.
Gilt $x = 0$, so führt (1) auf $y = -1$. Für $(x, y) = (0, -1)$ sind sowohl Gleichung (2) (mit $\lambda = 0$) als auch (3) erfüllt.
Sei nun $x \neq 0$. In diesem Fall liefern (1) bzw. (2)

$$\lambda = -\frac{y+1}{2x} \qquad \text{sowie} \qquad \lambda = -\frac{x}{2y}\,.$$

Also ist

$$\frac{y+1}{2x} = \frac{x}{2y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 + y = x^2.$$

Setzt man dies in (3) ein, so erhält man

$$(y^2 + y) + y^2 - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2y^2 + y - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = -1 \ \text{ oder } \ y = \frac{1}{2}.$$

Für $y = -1$ hat man wegen (3): $x^2 = 0$, d.h. $x = 0$. Für $y = \frac{1}{2}$ gilt nach (3)

$$x^2 + \frac{1}{4} - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = \frac{3}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ oder } \ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgrund von

$$f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad \text{und} \qquad f(0, -1) = 0$$

besitzt f auf S das Maximum $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ und das Minimum $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

b) Es gilt

$$\operatorname{grad} g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x \end{pmatrix}.$$

Ist $\operatorname{grad} g(x, y) = (0, 0)$, so folgt wegen der zweiten Komponente $x = 0$ und daher $y = 0$. Demnach ist $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von g, also der einzige Kandidat für eine lokale Extremstelle von g. Die Hessematrix

$$H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist indefinit, weil $\det H_g(0, 0) = -1 < 0$ gilt. Daher besitzt g in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt und kein lokales Extremum.

Aufgabe 3

Schreibe $\vec{g} = f\vec{v}$ mit

$$f(x,y,z) := \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \qquad \vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mit der Produktregel aus 19.21 erhalten wir $\operatorname{rot}\vec{g} = \nabla\times\vec{g} = \nabla\times(f\vec{v}) = f(\nabla\times\vec{v}) + (\nabla f)\times\vec{v}$. Offenbar ist $\nabla\times\vec{v} = \vec{0}$ und $\partial_1 f(x,y,z) = -2x(x^2+y^2+z^2)^{-2} + 8x(x^2+y^2+z^2)^{-3}$; die anderen partiellen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{8-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad (\nabla f)\times\vec{v} = \vec{0}\,.$$

Folglich ist $\operatorname{rot}\vec{g} = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{g} &= \nabla\cdot\vec{g} = \nabla\cdot(f\vec{v}) = f(\nabla\cdot\vec{v}) + (\nabla f)\cdot\vec{v} \\ &= 3f + \frac{8-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,(x^2+y^2+z^2) = \frac{x^2+y^2+z^2+2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Für $r>0$ und $\varphi\in(-\pi,\pi)$ gilt

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(g(r,\varphi)) = u\circ g(r,\varphi)$$

mit $g\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2$, $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$v'(r,\varphi) = u'(g(r,\varphi))\cdot g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} u_x(g(r,\varphi)) & u_y(g(r,\varphi))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Mit $v'(r,\varphi) =: (v_r(r,\varphi)\quad v_\varphi(r,\varphi))$ erhält man für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} v_r(r,\varphi) &= \cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \\ v_\varphi(r,\varphi) &= -r\sin\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + r\cos\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi).\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} v_{rr}(r,\varphi) &= \cos\varphi\,\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\cos\varphi + u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\sin\varphi\big) \\ &\quad + \sin\varphi\,\big(u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\cos\varphi + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\sin\varphi\big) \\ &= \cos^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + 2\sin\varphi\,\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) &= -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad - r\sin\varphi\,\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big) \\ &\quad - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + r\cos\varphi\,\big(u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big) \\ &= -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + r^2\sin^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 2r^2\sin\varphi\,\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\quad + r^2\cos^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi).\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\,(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\,(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\,(r,\varphi) &= v_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\,v_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\,v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \\ &= (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) \\ &= u_{xx}(x,y) + u_{xx}(x,y) = \Delta u(x,y)\end{aligned}$$

mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$.

Aufgabe 5

a) Mit $\dot\gamma(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}\|\dot\gamma(t)\| &= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1} \\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2+t^2}\,.\end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi}\Big(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\Big)\sqrt{2+t^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \left[\tfrac{1}{3}(2+t^2)^{3/2}\right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{3}\big((2+4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\big) \\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\big((1+2\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,.\end{aligned}$$

b) **i)** Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_0^{2\pi} \vec v(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{pmatrix}dt \\ &= \int_0^{2\pi}(-e^{\cos t}\sin t + \sin t\cos^2 t)\,dt = \left[e^{\cos t} - \tfrac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = 0\,.\end{aligned}$$

ii) Auch hier benutzen wir die Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_0^{\ln 2}\vec v(\gamma(t))\cdot\gamma(t)\,dt = \int_0^{\ln 2}\begin{pmatrix}\cosh t \\ -\sinh t \\ \sinh t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t\end{pmatrix}dt \\ &= \int_0^{\ln 2}(\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t\cosh t)\,dt = \int_0^{\ln 2}(1 + \sinh t\cosh t)\,dt \\ &= \ln 2 + \left[\tfrac{1}{2}\sinh^2 t\right]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\big)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.\end{aligned}$$