

Übungsklausur
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (12+8 Punkte)

a) Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A .

b) Seien $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\text{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$ an.

Aufgabe (20 Punkte)

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x, y) = xy.$$

Begründen Sie, dass f auf der Menge

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Maximum und Minimum annimmt, und berechnen Sie diese.

Aufgabe 3 (10 +10 Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix}$$

und die Kurve

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass \vec{v} ein Gradientenfeld ist und berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

- b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $2z^3 + 7z^2 - 3xyz + y^3 = 1$ in einer Umgebung von $(0, -2, 1)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x, y)$ die Ableitung $g'(x, y)$.

Aufgabe 4 (10 +10 Punkte)

- a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x^2 + 5yz + \cos(x - z) \\ 5xz + y^2 \\ 5xy - \cos(x - z) + z^3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass \vec{v} ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie ein zugehöriges Potential.

- b) Es sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x + y \leq 2\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_K y \, d(x, y).$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Donnerstag, den 12.07. in den Tutoriengruppen abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den 19.07. von 13.15 Uhr bis 13.45 Uhr im Raum 2.032 (Mathematikgebäude) möglich.