

Partielle Differentialgleichungen

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und nichtleer sowie $U = (u_1, u_2, u_3) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} U = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

(b) Betrachten Sie ein elektrodynamisches System, in dem die Felder \mathcal{E} , \mathcal{D} , \mathcal{B} und \mathcal{H} die vier Maxwell'schen Gleichungen erfüllen und in $C^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ sind und bei dem die Stromdichte $j = 0$ ist. Zeigen Sie, dass die Ladungsdichte ρ nicht von der Zeit abhängt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} \mathcal{D}$ zeitunabhängig ist.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, t) := \frac{a}{\cosh(b(x - ct))},$$

die nichtlineare Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = u - u^3$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ löst.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für $R > 0$ die Gauß'sche und die mittlere Krümmung von:

(a) der oberen Halbsphäre

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0\}.$$

(b) dem halben Zylindermantel

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = R^2, z > 0\}.$$

Hinweis: Beschreiben Sie die Flächen als Funktionsgraphen und benutzen Sie die Definitionen der Krümmungen aus der Vorlesung.

Aufgabe 4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Für $u \in C^2(\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$ gelte

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega.$$

Sei zudem $T \in O(n)$ eine orthogonale $n \times n$ -Matrix und $\tilde{u}(x) := u(Tx)$ sowie $\tilde{f}(x) := f(Tx)$ für $x \in \tilde{\Omega} := \{T^{-1}y : y \in \Omega\}$. Zeigen Sie, dass \tilde{u} die Gleichung

$$-\Delta \tilde{u}(x) = \tilde{f}(x) \quad \text{in } \tilde{\Omega}$$

erfüllt.

Hinweis: Zeigen Sie die Rotationsinvarianz des Laplace-Operators, d.h. $-\Delta \tilde{u}(x) = (-\Delta u)(Tx)$ für alle $x \in \tilde{\Omega}$.

Organisatorisches

Übungsblätter

- Das neue Übungsblatt gibt es mittwochs auf der Homepage <http://www.math.kit.edu/iana2/lehre/klmethpdgln2016w/>
- Keine Abgabe, keine Korrektur.

Bei Fragen

- Sprechstunde: Freitag 10:00-11:00, Zimmer 3.034.
- E-Mail: janina.gaertner@kit.edu