Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
26.10.2016

Partielle Differentialgleichungen

2. Übungsblatt

Aufgabe 5
Betrachten Sie die Gleichung

$$-\Delta u(x) = 1. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen von (1) auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

(b) Ermitteln Sie eine Lösung $u \in C^2(\overline{B}_1(0))$ von (1) auf $\overline{B}_1(0)$ mit $u(x) = 0$ für $|x| = 1$.

Aufgabe 6
Für $n \geq 2$ und $R > 0$ heißt die Abbildung S, definiert durch

$$S : \begin{cases} \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ \qquad x \mapsto \dfrac{R^2}{|x|^2} x, \end{cases}$$

Spiegelung an der Sphäre $\partial B_R(0)$. Die Funktion

$$v(x) := \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} u(Sx)$$

heißt *Kelvin-Transformierte* von u. Zeigen Sie: Ist u harmonisch auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, so ist auch v harmonisch auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Aufgabe 7
Im $\mathbb{R}^2$ seien Polarkoordinaten wie folgt eingeführt: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Für $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sei $v : [0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Zeigen Sie, dass $v \in C^2((0,\infty) \times (0, 2\pi))$ mit

$$(\Delta u)(x,y) = (Lv)(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \text{ wobei } L := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Betrachten Sie den Kegel

$$C_\alpha := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < \alpha\}$$

mit Öffnungswinkel $\alpha \in (0, 2\pi)$. Ermitteln Sie alle in C_α harmonischen, positiven Funktionen u der Form $u(r,\varphi) = r^\beta w(\varphi)$ mit $u = 0$ auf ∂C_α.

Aufgabe 8

(a) Bestimmen Sie die Mittelwerte $m_R(0; u)$ und $M_R(0; u)$ für die Funktionen x_i, $x_i x_j$ und $|x|^\alpha$ mit $\alpha > -n$ und $i, j = 1, \ldots, n$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Mittelwerte $m_R(x_0; |x|^2)$ und $M_R(x_0; |x|^2)$.