Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
02.11.2016

Partielle Differentialgleichungen

3. Übungsblatt

Aufgabe 9
Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion einer Funktion $u : B \to \mathbb{R}$, die in einer Kugel $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, positiv und harmonisch ist, und die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} &\exists P \in \partial B, \text{ sodass } \forall \overline{x} \in \partial B \backslash \{P\} \text{ gilt} : \lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in B}} u(x) = 0, \\ &\exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B \text{ mit } \lim_{k \to \infty} x_k = P \text{ und } \lim_{k \to \infty} u(x_k) = \infty. \end{aligned} \tag{1}$$

Gehen Sie hierfür folgendermaßen vor:

(a) Für $d > 0$ seien $H := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > d\}$ und $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \left|x - \left(\frac{1}{2d}, 0, \ldots, 0\right)\right| < \frac{1}{2d}\}$. Zeigen Sie: Die Kelvin-Transformation $S(x) = \frac{x}{|x|^2}$ ist eine Bijektion zwischen H und B.

(b) Betrachten Sie auf H die Funktion $v(x) := x_1 - d$. Beweisen Sie, dass die Kelvin-Transformierte

$$u(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

die Eigenschaften (1) besitzt.

Aufgabe 10
Bestimmen Sie alle Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ in $\Omega := (-l, l) \times (-1, 1)$ der Form $u(x, y) = f(x)g(y)$, sodass $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und $u(x, -1) = u(x, 1) = 0$ für alle $x \in [-l, l]$.

Aufgabe 11

(a) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie:
Existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $|u(x_0)| = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$, so gilt $u \equiv \text{const}$.

(b) Seien nun $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash K$. Die Funktion u sei harmonisch in Ω, stetig auf $\overline{\Omega}$ und es gelte $\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$. Beweisen Sie, dass $\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)|$.