Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
09.11.2016

Partielle Differentialgleichungen

4. Übungsblatt

Aufgabe 12
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und G eine Greensche Funktion auf Ω. Beweisen Sie, dass G eindeutig ist.

Aufgabe 13
Es sei $H := \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ ein Halbraum. Zu $x = (x', x_n) \in H$ sei $x^\star := (x', -x_n) \in \mathbb{R}^n$ der an ∂H gespiegelte Punkt.

(a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$G(x,y) := \gamma(x-y) - \gamma(x^\star - y) \quad (\text{für } x \neq y, x, y \in \overline{H})$$

ist eine Greensche Funktion für den Halbraum H.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Zeigen Sie, dass eine harmonische Fortsetzung von f auf H durch

$$u(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial G}{\partial y_n}(x,(y',0)) f(y') dy', & x \in H \\ f(x), & x \in \partial H \end{cases}$$

gegeben ist.
Hinweis: Für alle $x \in H$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial G}{\partial y_n}(x,(y',0)) dy' = 1.$$

Aufgabe 14
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein Punkt $x_0 \in \Omega$ heißt hebbare Singularität der harmonischen Funktion $u : \Omega\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$, falls eine harmonische Funktion $\widetilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{u}(x) = u(x)$ für alle $x \in \Omega\backslash\{x_0\}$ existiert. Zeigen Sie:

(a) Ist $u : \Omega\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch und gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{\gamma(x-x_0)} = 0,$$

so ist x_0 eine hebbare Singularität.
Hinweis: Verwenden Sie o.B.d.A. $\overline{B_1(x_0)} \subset \Omega$ und untersuchen Sie die Funktion $v_\varepsilon(x) = u - Pu + \varepsilon(\gamma(x-x_0) - g(1))$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Hierbei ist Pu das Poisson-Integral von u auf $\partial B_1(x_0)$. Zeigen Sie nun, dass in $B_1(x_0)\backslash\{x_0\}$ gilt: $v_\varepsilon \geq 0$ für $\varepsilon \geq 0$ und $v_\varepsilon \leq 0$ für $\varepsilon \leq 0$.

(b) Ist $u : \Omega\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch mit

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{\gamma(x-x_0)} = c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$, so gilt $u(x) = c\gamma(x-x_0) + v(x)$ mit einer harmonischen Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$.