Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
16.11.2016

Partielle Differentialgleichungen

5. Übungsblatt

Aufgabe 15

Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ harmonisch.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial u}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ harmonisch ist.

(b) Sei zusätzlich $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty < \infty$ für $i = 1, \ldots, n$. Beweisen Sie:
Es existieren $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, sodass

$$u(x) = a \cdot x + b \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 16

(a) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Weiter sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie:

  (i) u harmonisch $\Rightarrow f(u)$ subharmonisch.

  (ii) Ist f zusätzlich monoton wachsend, so gilt:
  u subharmonsich $\Rightarrow f(u)$ subharmonisch.

Hinweis: Jensensche Ungleichung

(b) Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto |x|^\alpha$ auf $B_1(0)$ bzw. auf $B_1(0)\backslash\{0\}$ falls $\alpha < 0$. Bestimmen Sie diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Funktion subharmonisch bzw. superharmonisch ist.

Aufgabe 17

(a) Zeigen Sie: Eine im $\mathbb{R}^2$ subharmonische, nach oben beschränkte Funktion u ist konstant.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst die folgende Aussage: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $\delta > 0$. Ist $m_\delta := \max\limits_{\partial B_\delta(x_0)} u$ und $\varepsilon > 0$, so gilt:

$$u(x) \leq m_\delta + \varepsilon \log\left(\frac{|x - x_0|}{\delta}\right) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{B_\delta(x_0)}.$$

(b) Finden Sie eine im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ subharmonische, beschränkte, nicht-konstante Funktion.
Hinweis: Man probiere $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ für geeignete $\alpha \in \mathbb{R}$.