Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
23.11.2016

Partielle Differentialgleichungen

6. Übungsblatt

Aufgabe 18

Sei $H := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ sowie $u : \overline{H} \to \mathbb{R}$ harmonisch in H und stetig in $\overline{H}$ mit $u = 0$ auf ∂H. Zeigen Sie: Ist u beschränkt, so gilt $u \equiv 0$.

Hinweis: Definieren Sie die Funktion $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $v(x) := u(x)$ für $x \in H$ und $v(x_1, \dots, x_n) := -v(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ für $x \in \mathbb{R}^n \backslash H$. Zeigen Sie dass v in $\mathbb{R}^n$ harmonisch ist.

Aufgabe 19

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u_1, u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) u_1, u_2 subharmonisch in $\Omega \Rightarrow \max(u_1, u_2)$ subharmonisch in Ω.

(b) u_1, u_2 subharmonisch in $\Omega \Rightarrow \min(u_1, u_2)$ subharmonisch in Ω ist im allgemeinen falsch.

Aufgabe 20

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und u harmonisch in Ω.

(a) Zudem sei $B_R(x_0) \subset \Omega$ und es gelte $|u(x)| \leq M$ in $B_R(x_0)$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} M$$

für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = m$.

(b) Beweisen Sie nun, dass u analytisch in Ω ist.