Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
30.11.2016

Partielle Differentialgleichungen

7. Übungsblatt

Aufgabe 21
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ ein beschränktes Gebiet, welches in jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ die innere Kugelbedingung erfüllt. Zudem sei $f \in C(\partial\Omega)$. Zeigen Sie: Das Problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega} =: \Omega_a \\ \quad u = f & \text{auf } \partial\Omega \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

besitzt genau eine Lösung.
Hinweis: Für die Existenz betrachte man für $x_0 \in \Omega$ und $R > 0$ hinreichend groß die Lösung u_R des Problems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in } \Omega_{a,R} \\ \quad u = f & \textit{auf } \partial\Omega \\ \quad u = 0 & \textit{auf } \partial B_R(x_0), \end{cases}$$

wobei $\Omega_{a,R} := \Omega_a \cap B_R(x_0)$. Finden Sie Abschätzungen an u_R mit Hilfe von $\pm \|f\|_\infty \frac{\gamma(x-x_0)}{g(R)}$ und untersuchen Sie $u(x) := \lim\limits_{R\to\infty} u_R(x)$.

Aufgabe 22
Es sei $n \geq 2$ und u die Perron-Lösung des Problems

$$\begin{cases} \quad \Delta u = 0 & \text{in } \Omega := B_1(0)\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}^n, \\ \quad\quad u = 0 & \text{auf } \partial B_1(0), \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $u \equiv 0$ in $\overline{B_1(0)}\backslash\{0\}$, $u(0) = 1$ gilt, indem Sie eine Folge von Oberfunktionen konstruieren, die in Ω punktweise gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 23
$K \subset \mathbb{R}^2$ heißt Kegel mit Öffnungswinkel $\alpha \in (0, 2\pi)$, falls K durch eine euklidische Bewegung in die Menge

$$K_0 = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < \alpha\}$$

überführt werden kann.
Es sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Im Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ erfülle Ω folgende Bedingung: Es existiert ein Kegel K mit $K \subset \Omega^c$, $\overline{K} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Zeigen Sie, dass x_0 ein regulärer Randpunkt ist.

Hinweis: Finden Sie eine in $\overline{K}^c$ positive harmonische Funktion (vgl. Aufgabe 7).