Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
14.12.2016

Partielle Differentialgleichungen

9. Übungsblatt

Aufgabe 27: Symmetriegruppen der Wärmeleitungsgleichung
Es sei $u(x,t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ die Funktion $u_\varepsilon(x,t)$, definiert durch

(a) $u_\varepsilon(x,t) = u(x, t+\varepsilon), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

(b) $u_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{(1+4\varepsilon t)^{n/2}} \exp\left(\frac{-\varepsilon |x|^2}{1+4\varepsilon t}\right) u\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

(c) $u_\varepsilon(x,t) = \mathrm{e}^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} u(x - 2\varepsilon t, t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ (Beachten Sie: hier $n = 1$),

ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung löst.
Wie kann man mit Hilfe der gegebenen Transformationen eine Konstante in die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung überführen?

Aufgabe 28
Betrachten Sie das Cauchyproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + cu + b \cdot \nabla u = \widetilde{f}(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = \widetilde{g}(x) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{1}$$

für gegebene Funktionen $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\widetilde{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: (1) lässt sich zurückführen auf

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = f(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v = g(x) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{2}$$

indem $(u, \widetilde{f}, \widetilde{g})$ durch Transformation in (v, f, g) überführt werden.

Hinweis: Benutzen Sie die Transformation $v : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $v(x,t) := u(x,t)e^{dt}e^{a\cdot x}$ für geeignete $d \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 29

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, beschränkt und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Betrachten Sie die Lösung

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) f(y) dy$$

der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \qquad\quad u = f(x) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.