Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
21.12.2016

Partielle Differentialgleichungen

10. Übungsblatt

Aufgabe 30
Seien $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt sowie $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ der zugehörige parabolische Zylinder. Ferner seien $u \in C(\Omega_T)$ und $(x_0, t_0) \in \Omega_T$. Zeigen Sie:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{4r^n} \int_{E(x_0,t_0;r)} u(y,s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} d(y,s) = u(x_0, t_0).$$

Aufgabe 31:
Seien $u_1, \ldots, u_n$ Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Zeigen sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = u(x_1, \ldots, x_n, t) = \prod_{i=1}^{n} u_i(x_i, t)$$

die n-dimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$$

in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ löst.

Aufgabe 32
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und konvexe Funktion, die für gegebene $a, M > 0$ die Wachstumsbedingung $|f(x)| \leq M\mathrm{e}^{ax^2}$ erfüllt. Betrachten Sie die Funktion

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) f(y) dy.$$

(a) Zeigen Sie, dass die so definierte Funktion $u : \mathbb{R} \times (0, t_0) \to \mathbb{R}$ für $t_0 := \frac{1}{4a}$ wohldefiniert ist und die homogene Wärmeleitungsgleichung löst.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \ni x \mapsto u(x,t)$ für alle $t \in (0, t_0)$ konvex ist.

(c) Beweisen Sie: $t_0 > t_2 > t_1 > 0 \Rightarrow u(x, t_2) \geq u(x, t_1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) Sei nun $f(x) = M\mathrm{e}^{ax^2}$. Untersuchen Sie in diesem Fall $u(x,t)$ für $t \to t_0$.

Wir wünschen Ihnen fröhliche Weihnachten und alles Gute für das Jahr 2017 !!