Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
11.01.2017

Partielle Differentialgleichungen

11. Übungsblatt

Aufgabe 33

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $T > 0$ und $g \in L^\infty(\overline{\Omega})$. Ferner sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & \text{in } \Omega_T, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0,T], \\ u(x,0) = g(x), & x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Für jedes $\tau > 0$ existiert eine Konstante $C = C(\tau) \geq 0$ so, dass

$$|u(x,t)| \leq C \frac{1}{(4\pi(t+\tau))^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t+\tau)}} \quad \text{für alle } (x,t) \in \overline{\Omega}_T.$$

Aufgabe 34

Betrachten Sie das Problem

$$(\star) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi, 0 < t < \infty, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = h(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Verwenden Sie einen Separationsansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$, um die Lösung von $(\star)$ mit $h(x) = \sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$ zu bestimmen.

(b) Lösen Sie nun das Problem $(\star)$ mit $h(x) = 5\sin(x) - 2\sin(5x)$.

Aufgabe 35: Nichteindeutigkeit der Wärmeleitungsgleichung

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-t^{-2}), & \text{für } t > 0, \\ 0, & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

und $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$u(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}.$$

Zeigen Sie: $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}\times(0,\infty))\cap C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0) = 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie (Beweis in der Übung):
Es existiert ein $\theta > 0$ *so, dass* $\left|g^{(k)}(t)\right| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-2}\right)$ *für alle* $t > 0$.