Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
18.01.2017

Partielle Differentialgleichungen

12. Übungsblatt

Aufgabe 36

Seien $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Finden Sie eine explizite Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + b \cdot \nabla u + cu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Hinweis: Gehen Sie vor wie in Aufgabe 28.

Aufgabe 37

Es sei $u(x,t)$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen ebenfalls die homogene Wellengleichung lösen:

(a) $u_\varepsilon(x,t) = u(\varepsilon x, \varepsilon t)$, $\varepsilon > 0$,

(b) $u_A(x,t) = u(Ax,t)$, $A \in O(n)$,

(c) $u_\varepsilon(x_1,\dots,x_n,t) = u\Big(\dfrac{x_1 - \varepsilon t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, x_2, \dots, x_n, \dfrac{t - \varepsilon x_1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\Big)$ wobei $\varepsilon \in (-1,1)$.

Aufgabe 38 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit)

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Für feste $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$ sei der Kegel K definiert durch

$$K := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \le t \le t_0 \text{ und } |x - x_0| \le t_0 - t\}.$$

Beweisen Sie: Falls $u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ auf $B_{t_0}(x_0) \times \{t = 0\}$, so ist $u \equiv 0$ in K. Betrachten Sie dazu das Energie-Funktional $e : [0,t_0] \to [0,\infty)$

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{B_{t_0 - t}(x_0)} \Big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big)^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \, dx.$$

Zeigen Sie zunächst durch Differentiation, dass e monoton fallend ist.

Hinweis: Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig sowie $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ gilt:

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B_r(x_0)} f\,dx\right) = \frac{d}{dr}\left[\int_0^r \left(\oint_{\partial B_\varrho(x_0)} f\,d\sigma\right) d\varrho\right] = \oint_{\partial B_r(x_0)} f\,d\sigma.$$