Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
25.01.2017

Partielle Differentialgleichungen

13. Übungsblatt

Aufgabe 39

Konstruieren Sie eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

mit der folgenden Eigenschaft

$$u(10,t) \begin{cases} = 0, & t \in [0,2], \\ \neq 0, & t \in (2,3), \\ = 0, & t \in [3,\infty). \end{cases}$$

Aufgabe 40

Stehende Wellen sind Funktionen der Form $u(x,t) = v(x)\sin(\omega t + \varphi)$ mit $\omega > 0$, $\varphi \in [0, 2\varphi)$ und $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$, die die homogene Wellengleichung lösen.

(a) Welcher Differentialgleichung genügt v?

(b) Es sei $n = 1$. Bestimmen Sie alle stehenden Wellen. Zeigen Sie explizit, dass sich jede stehende Welle als Summe einer nach rechts und einer nach links laufenden Welle darstellen lässt.

(c) Bestimmen Sie alle stehenden sphärischen Wellen im Fall $n = 3$. Als sphärische Welle bezeichnen wir eine Lösung $u(x,t) = w(|x|)\sin(\omega t + \varphi)$ der Wellengleichung, die nur von t und $r = |x|$ abhängt.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $W := rw$ (für das Profil w einer stehenden sphärischen Welle).

Aufgabe 41

Sei $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u = g, \frac{\partial u}{\partial t} = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

für gegebene Funktionen $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ mit kompaktem Träger, d.h. es gibt ein $R > 0$ mit $g(x) = h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| > R$. Zeigen Sie:
Es existiert eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$