Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Janina Gärtner

WS 2016/17
01.02.2017

Partielle Differentialgleichungen

14. Übungsblatt

Aufgabe 42

Ziel der Aufgabe ist es, eine Typeneinteilung für *nichtlineare* partielle Differentialgleichungen zu erhalten. Beispiele hierfür sind

(a) die Minimalflächen-Gleichung $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0$ in $\mathbb{R}^n$ und

(b) die *Monge-Ampère-Gleichung* $\det(D^2 u) = 0$ in $\mathbb{R}^2$.

Man geht dabei folgendermaßen vor: Wir betrachten eine Lösung $u \in C^2(\Omega)$ der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung

$$F(\nabla u(x), D^2 u(x)) = 0, \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \\ (p, Q) \mapsto F(p, Q). \end{cases}$$

Die Koeffizienten der zugehörigen *linearisierten Differentialgleichung*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x) = 0 \tag{2}$$

werden für $x \in \Omega$ wie folgt bestimmt

$$a_{ij}(x) := \frac{\partial F}{\partial q_{ij}}(\nabla u(x), D^2 u(x)),$$
$$b_i(x) := \frac{\partial F}{\partial p_i}(\nabla u(x), D^2 u(x)),$$

wobei $p = (p_1, \ldots, p_n)$ und $Q = (q_{ij})_{i,j=1}^n$.

(1) heißt elliptisch/parabolisch/hyperbolisch in der Lösung u, falls (2) elliptisch/parabolisch/hyperbolisch ist.

Bestimmen Sie die Typeneinteilung für (a) und (b). Nehmen Sie dazu in (b) an, dass die Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ konvex ist.

Aufgabe 43

Es sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Bestimmen Sie den Typ der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $(x, y \in \Omega)$.

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $(x, y \in \Omega)$.

(c) $-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$.
Zeigen Sie zudem, dass die Parabel $\mathcal{F} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2}y^2\}$ charakteristisch ist.