Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Klassische Methoden für partielle Differentialgleichungen
Wintersemester 2016/17

30.03.2017

Name:

Vorname.:

Matrikel-Nr.:

Bitte Fachrichtung ankreuzen:

	Mathematik (Bachelor)
	Mathematik (Master)
	Mathematik (Lehramt)
	Physik
	Sonstige:

!Schreiben Sie auf jedes Blatt deutlich lesbar Ihren Namen, Vornamen und Ihre Matrikelnummer!

Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.
Zum Bestehen der Klausur sind 8 von 24 Punkten zu erlangen.

1	2	3	4	5	6

Gesamtpunktzahl	Note

Aufgabe 1:
Es sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C([0,1])$ und $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)})$ eine Lösung der Poissongleichung

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u = f(|x|), & \text{in } B_1(0), \\ u(x_1, x_2) = 0, & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung der Poissongleichung (1) eindeutig und rotationssymmetrisch ist, d.h. $u(x) = u(Ax)$ für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ und alle orthogonalen Matrizen $A \in O(2)$.

(b) Lösen Sie (1) mit $f(s) = s^2$.

Aufgabe 2:
Es seien $n \geq 2$, $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(x_0)}$ und $u : \Omega \to (0, \infty)$ harmonisch. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass u im Allgemeinen nicht konstant ist.

Hinweis: Unterscheiden Sie $n = 2$ und $n \geq 3$.

Aufgabe 3:

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $v(x,t) = \mathrm{e}^{-at}\cos(bx)$ die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $v_t - v_{xx} = 0$ löst.

(b) Es sei $\Omega_T := \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \times (0,T)$ und $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{in } \Omega_T, \\ u\left(-\frac{\pi}{4}, t\right) = u\left(\frac{\pi}{4}, t\right) = 0, & \forall t \in (0,T), \\ u(x,0) = g(x), & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \end{cases}$$

mit $g \in C\left([-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\right)$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$-C\mathrm{e}^{-t}\cos x \leq u(x,t) \leq C\mathrm{e}^{-t}\cos x \quad \forall (x,t) \in \Omega_T.$$

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie mit einem Separationsansatz eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(2)\qquad \begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v(x,0) = \sin(x), & \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie nun eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + \cos(t)u = 0, & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = \sin(x), & \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Wählen Sie dazu den Ansatz

$$u(x,t) = \frac{v(x,t)}{g(t)}$$

mit $g \in C^1((0,\infty))$, wobei v eine Lösung von (2) ist und bestimmen Sie g.

Aufgabe 5:
Es sei $u \in C^{2,2}((0,1) \times (0,\infty)) \cap C([0,1] \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f'(x), & t > 0, x \in (0,1), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = g(x), & \forall x \in [0,1], \end{cases}$$

für gegebene Funktionen $f, g \in C^2([0,1])$. Definiere $E(t) := \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 \big(u_x(x,t)^2 + u_t(x,t)^2\big)\, dx$.

(a) Zeigen Sie

$$E'(t) = \int_0^1 f'(x) u_t(x,t)\, dx.$$

(b) Zeigen Sie

$$E(t) - E(0) = -\int_0^1 f(x) u_x(x,t)\, dx.$$

(c) Zeigen Sie

$$E(t) \leq 2\Big(E(0) + \int_0^1 f(x)^2\, dx\Big).$$

Aufgabe 6:
Sei $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x) & \text{in } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

für gegebene Funktionen $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit kompaktem Träger, d.h. es gibt ein $R > 0$ mit $g(x) = h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| > R$.
Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$|u(0,t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{für } t > 0.$$