Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Klassische Methoden für partielle Differentialgleichungen
Sommersemester 2017

27.09.2017

Name:
Vornane:
Matrikel-Nr.:

Bitte Fachrichtung ankreuzen:

	Mathematik (Bachelor)
	Mathematik (Master)
	Mathematik (Lehramt)
	Physik
	Sonstige:

!Schreiben Sie auf jedes Blatt deutlich lesbar Ihren Namen, Vornamen und Ihre Matrikelnummer!

Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.
Zum Bestehen der Klausur sind 8 von 24 Punkten zu erlangen.

1	2	3	4	5	6

Gesamtpunktzahl	Note

Aufgabe 1:
Es sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch und $\frac{\partial u}{\partial x_1} \geq 0$ auf $\mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie: Es existieren Konstanten $a \geq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, sodass

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$$

für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

(a) Es seien $n = 1$ und $\Omega = (-1, 1)$. Entscheiden Sie ob die Funktion $u : \Omega \to (0, \infty)$

$$u(x) := \begin{cases} 1 - x & \text{für } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{für } x \in (-1, 0), \end{cases}$$

superharmonisch auf Ω ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $u : \Omega \to (0, \infty)$ harmonisch, so ist $v := \ln u$ superharmonisch in Ω.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $u : \Omega \to (0, \infty)$ superharmonisch, so ist $v := \ln u$ superharmonisch auf Ω.

Aufgabe 3:
Es seien $T, R > 0$ und $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Gegeben sei das Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } B_R(0) \times (0,T), \\ u(x,0) = g(|x|) & \text{für } x \in \overline{B_R(0)}, \\ u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \partial B_R(0), t \in (0,T), \end{cases}$$

mit $g \in C(\overline{B_R(0)})$ und $g(R) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt höchstens eine Lösung $u \in C^{2,1}(B_R(0) \times (0,T)) \cap C(\overline{B_R(0)} \times [0,T])$.

(b) Die Lösung $u \in C^{2,1}(B_R(0) \times (0,T)) \cap C(\overline{B_R(0)} \times [0,T])$ erfüllt

$$u(x,t) = u(Ax,t)$$

für alle $x \in \overline{B_R(0)}$, $t \in [0,T]$ und alle orthogonale Matrizen $A \in O(n)$.

Aufgabe 4:
Es sei $g \in C([0,\infty)) \cap L^\infty([0,\infty))$ mit $g(0) = 0$. Betrachten Sie das Problem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } (0,\infty) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 & \text{für } t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{für } x \in [0,\infty). \end{cases}$$

Finden Sie eine Lösungsformel der Form

$$u(x,t) = \int_0^\infty \Psi(x,y,t) g(y) dy$$

und geben Sie die Funktion Ψ an.

Hinweis: Setzen Sie g zu einer ungeraden Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fort und lösen Sie das Anfangswertproblem für die fortgesetzte Funktion.

Aufgabe 5:
Es seien $k > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $v \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta v + kv = 0 & \text{in } \Omega, \\ v(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u(x,t) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = v(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases}$$

Hinweis: Wählen Sie den Ansatz

$$u(x,t) = v(x) \cdot g(t)$$

mit einer geeigneten Funktion g, wobei v eine Lösung von (1) ist.

(b) Bestimmen Sie eine Lösung $v \in C^2(\overline{\Omega})$ von (1) für $n = 2$, $k = 2$ und $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$ mithilfe eines Separationsansatzes der Form

$$v(x_1, x_2) = a(x_1) \cdot b(x_2).$$

Aufgabe 6:
Es sei $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

mit $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Es gelte $g(x) = h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| \geq R$ ($R > 0$ fest). Zeigen Sie:

(a) Es gilt $u(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ mit $|x| > R + t$.

(b) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit äußerer Normalen ν und

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega (u_t(x,t))^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \, dx,$$

so gilt

$$e'(t) = \int_{\partial\Omega} u_t(x,t) \nabla u(x,t) \cdot \nu d\sigma_x.$$

(c) Ist $\Omega = \mathbb{R}^3$, so ist e konstant.