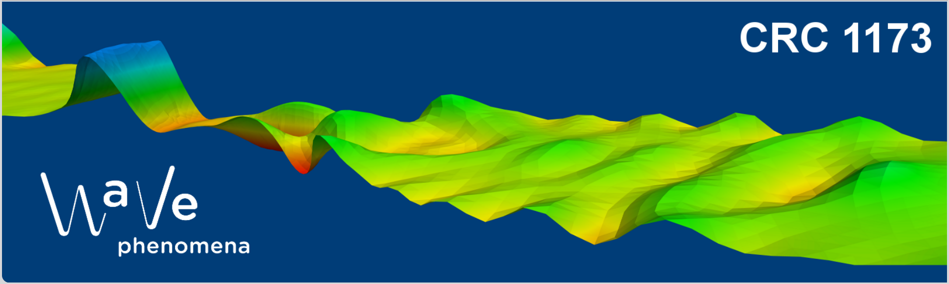
Karlsruhe Institute of Technology

1. Vorlesung: Klassische Methoden für partielle Differentialgleichungen

Wolfgang Reichel

Karlsruhe, 17. Oktober 2016

Institut für Analysis



Inhaltsübersicht

1. Einführung: Notation und Beispiele

1.1. Notation

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $\neq \emptyset$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.
Schreibweise: $u(x)$ bzw. $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. Einführung: Notation und Beispiele

1.1. Notation

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $\neq \emptyset$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.
Schreibweise: $u(x)$ bzw. $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Falls alle partielle Ableitungen der Ordnung $\leq k \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) existieren und stetig sind, so schreibt man:

$$u \in C^k(\Omega)$$

1. Einführung: Notation und Beispiele

Karlsruhe Institute of Technology

1.1. Notation

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $\neq \emptyset$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.
Schreibweise: $u(x)$ bzw. $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Falls alle partielle Ableitungen der Ordnung $\leq k \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) existieren und stetig sind, so schreibt man:

$$u \in C^k(\Omega)$$

$C^0(\Omega) =$ Menge der auf Ω stetigen Funktionen

1. Einführung: Notation und Beispiele

Karlsruhe Institute of Technology

1.1. Notation

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $\neq \emptyset$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.
Schreibweise: $u(x)$ bzw. $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Falls alle partielle Ableitungen der Ordnung $\leq k \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) existieren und stetig sind, so schreibt man:

$$u \in C^k(\Omega)$$

$C^0(\Omega) =$ Menge der auf Ω stetigen Funktionen

partielle Ableitungen 1.Ordnung: $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$

partielle Ableitungen 2.Ordnung: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad u_{x_i x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n$

1. Einführung: Notation und Beispiele

Karlsruhe Institute of Technology

1.1. Notation

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $\neq \emptyset$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.
Schreibweise: $u(x)$ bzw. $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Falls alle partielle Ableitungen der Ordnung $\leq k \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) existieren und stetig sind, so schreibt man:

$$u \in C^k(\Omega)$$

$C^0(\Omega) =$ Menge der auf Ω stetigen Funktionen

partielle Ableitungen 1.Ordnung: $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i}, \quad i = 1, \dots, n$

partielle Ableitungen 2.Ordnung: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad u_{x_i x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n$

Ist die Reihenfolge erheblich?
<u>Satz von Schwarz:</u> $u \in C^2(\Omega) \Rightarrow u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$

Gradient, Hesse-Matrix

Für $u \in C^1(\Omega)$ heisst die vektorwertige Funktion

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient von u.

$\nabla u(x)$=Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion u im Punkt $x \in \Omega$

Gradient, Hesse-Matrix

Für $u \in C^1(\Omega)$ heisst die vektorwertige Funktion

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient von u.
$\nabla u(x)$=Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion u im Punkt $x \in \Omega$

Für $u \in C^2(\Omega)$ heisst die matrixwertige Funktion

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & \cdots & u_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_n x_1} & \cdots & u_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von u.
Für $x \in \Omega$ ist $D^2 u(x)$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix.

Gradient, Hesse-Matrix

Für $u \in C^1(\Omega)$ heisst die vektorwertige Funktion

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient von u.

$\nabla u(x)$=Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion u im Punkt $x \in \Omega$

Für $u \in C^2(\Omega)$ heisst die matrixwertige Funktion

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & \cdots & u_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_n x_1} & \cdots & u_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von u.

Für $x \in \Omega$ ist $D^2 u(x)$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix.

Gradient, Hesse-Matrix

Karlsruhe Institute of Technology

Für $u \in C^1(\Omega)$ heisst die vektorwertige Funktion

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient von u.

$\nabla u(x)$=Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion u im Punkt $x \in \Omega$

Für $u \in C^2(\Omega)$ heisst die matrixwertige Funktion

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & \cdots & u_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_n x_1} & \cdots & u_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von u.

Für $x \in \Omega$ ist $D^2 u(x)$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix.

Höhere partielle Ableitungen

Wie beschreibt man effizient höhere partielle Ableitungen von u?

Höhere partielle Ableitungen

Wie beschreibt man effizient höhere partielle Ableitungen von u?

Benutze Multiindex-Schreibweise!

Höhere partielle Ableitungen

Wie beschreibt man effizient höhere partielle Ableitungen von u?

Benutze Multiindex-Schreibweise!

Definition (Multiindex)

Ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit ganzzahligen Einträgen heisst Multiindex. Die ganze Zahl

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

heisst Ordnung des Multiindexes.

Höhere partielle Ableitungen

Wie beschreibt man effizient höhere partielle Ableitungen von u?

Benutze Multiindex-Schreibweise!

Definition (Multiindex)

Ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit ganzzahligen Einträgen heisst Multiindex. Die ganze Zahl

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

heisst Ordnung des Multiindexes.
Für $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ heisst die Funktion

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

partielle Ableitung der Ordnung $|\alpha|$ zum Multiindex α.

Beispiele

Karlsruhe Institute of Technology

$n = 2$, $\alpha = (0,1)$

$$D^{(0,1)}u = \frac{\partial u}{\partial x_2} = u_{x_2}$$

Beispiele

$n = 2$, $\alpha = (0, 1)$

$$D^{(0,1)}u = \frac{\partial u}{\partial x_2} = u_{x_2}$$

$n = 3$, $\alpha = (2, 0, 1)$

$$D^{(2,0,1)}u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_3} = u_{x_1 x_1 x_3}$$

Beispiele

$n = 2$, $\alpha = (0,1)$

$$D^{(0,1)}u = \frac{\partial u}{\partial x_2} = u_{x_2}$$

$n = 3$, $\alpha = (2,0,1)$

$$D^{(2,0,1)}u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_3} = u_{x_1 x_1 x_3}$$

$n = 4$, $\alpha = (1,1,1,1)$

$$D^{(1,1,1,1)}u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4} = u_{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

Vektorwertige Funktionen

Sei $U : \Omega \to \mathbb{R}^l$ eine vektorwertige Funktion mit $U = (u_1, \ldots, u_l)$.
Dann bedeutet $U \in C^k(\Omega)$, dass $u_1, \ldots, u_l \in C^k(\Omega)$ liegen.

Vektorwertige Funktionen

Sei $U : \Omega \to \mathbb{R}^l$ eine vektorwertige Funktion mit $U = (u_1, \ldots, u_l)$.
Dann bedeutet $U \in C^k(\Omega)$, dass $u_1, \ldots, u_l \in C^k(\Omega)$ liegen.
Weiterhin sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Dann ist

$$D^\alpha U = (D^\alpha u_1, \ldots, D^\alpha u_l)$$

Vektorwertige Funktionen

Sei $U : \Omega \to \mathbb{R}^l$ eine vektorwertige Funktion mit $U = (u_1, \ldots, u_l)$.
Dann bedeutet $U \in C^k(\Omega)$, dass $u_1, \ldots, u_l \in C^k(\Omega)$ liegen.
Weiterhin sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Dann ist

$$D^\alpha U = (D^\alpha u_1, \ldots, D^\alpha u_l)$$

Divergenz: im Fall $l = n$

$$\operatorname{div} U = \nabla \cdot U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{1,x_1} + \cdots + u_{n,x_n}$$

Vektorwertige Funktionen

Sei $U : \Omega \to \mathbb{R}^l$ eine vektorwertige Funktion mit $U = (u_1, \ldots, u_l)$.
Dann bedeutet $U \in C^k(\Omega)$, dass $u_1, \ldots, u_l \in C^k(\Omega)$ liegen.
Weiterhin sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Dann ist

$$D^\alpha U = (D^\alpha u_1, \ldots, D^\alpha u_l)$$

Divergenz: im Fall $l = n$

$$\operatorname{div} U = \nabla \cdot U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{1,x_1} + \cdots + u_{n,x_n}$$

Rotation: im Fall $l = n = 3$

$$\operatorname{rot} U = \nabla \times U = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{3,x_2} - u_{2,x_3} \\ u_{1,x_3} - u_{3,x_1} \\ u_{2,x_1} - u_{1,x_2} \end{pmatrix}$$

Kann man sich das merken?

$$\operatorname{rot} U = \nabla \times U = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{3,x_2} - u_{2,x_3} \\ u_{1,x_3} - u_{3,x_1} \\ u_{2,x_1} - u_{1,x_2} \end{pmatrix}$$

Kann man sich das merken?

Karlsruhe Institute of Technology

$$\operatorname{rot} U = \nabla \times U = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{3,x_2} - u_{2,x_3} \\ u_{1,x_3} - u_{3,x_1} \\ u_{2,x_1} - u_{1,x_2} \end{pmatrix}$$

Für $i, j, k, \in \{1, 2, 3\}$ sei $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \text{Vorzeichen der Permutation } (i, j, k) \\ 0, \text{ falls } (i, j, k) \text{ keine Permutation.} \end{cases}$

$e_i = i$-ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$.

Kann man sich das merken?

$$\operatorname{rot} U = \nabla \times U = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{3,x_2} - u_{2,x_3} \\ u_{1,x_3} - u_{3,x_1} \\ u_{2,x_1} - u_{1,x_2} \end{pmatrix}$$

Für $i, j, k, \in \{1, 2, 3\}$ sei $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \text{Vorzeichen der Permutation } (i, j, k) \\ 0, \text{ falls } (i, j, k) \text{ keine Permutation.} \end{cases}$

$e_i = i$-ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$. Dann gilt

$$\operatorname{rot} U = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} e_i$$

Kann man sich das merken?

Karlsruhe Institute of Technology

$$\operatorname{rot} U = \nabla \times U = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{3,x_2} - u_{2,x_3} \\ u_{1,x_3} - u_{3,x_1} \\ u_{2,x_1} - u_{1,x_2} \end{pmatrix}$$

Für $i, j, k, \in \{1,2,3\}$ sei $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \text{Vorzeichen der Permutation } (i,j,k) \\ 0, \text{ falls } (i,j,k) \text{ keine Permutation.} \end{cases}$

$e_i = i$-ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$. Dann gilt

$$\operatorname{rot} U = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} e_i$$

1. Komponente: $i = 1$, Beitrag:	Permutation: (1,2,3) $+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$	Permutation: (1,3,2) $-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}$
2. Komponente: $i = 2$, Beitrag:	Permutation: (2,3,1) $+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$	Permutation: (2,1,3) $-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$
3. Komponente: $i = 3$, Beitrag:	Permuation: (3,1,2) $+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$	Permutation: (3,2,1) $-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$

Identitäten zwischen rot, div, grad

Seien $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $U : \Omega \to \mathbb{R}^l$ C^2-Funktionen. Dann heisst die Funktion

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$$

Laplace von u. $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ heisst Laplace-Operator.

$$\Delta U := \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_l \end{pmatrix}$$

Es gelten folgende Identitäten:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u$$

Identitäten zwischen rot, div, grad

Karlsruhe Institute of Technology

Seien $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $U : \Omega \to \mathbb{R}^l$ C^2-Funktionen. Dann heisst die Funktion

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$$

Laplace von u. $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ heisst Laplace-Operator.

$$\Delta U := \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_l \end{pmatrix}$$

Es gelten folgende Identitäten:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u$$

Für $n = 3$ gilt: $\quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} U) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} U) - \Delta U,$

Identitäten zwischen rot, div, grad

Seien $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $U : \Omega \to \mathbb{R}^l$ C^2-Funktionen. Dann heisst die Funktion

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$$

Laplace von u. $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ heisst Laplace-Operator.

$$\Delta U := \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_l \end{pmatrix}$$

Es gelten folgende Identitäten:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u$$

Für $n = 3$ gilt: $\quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} U) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} U) - \Delta U,$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} U) = 0 \quad \text{sowie} \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0.$$

1.2. Was ist eine partielle DGl?

Pseudo-Definition

Eine partielle Differentialgleichung (pDGl) ist eine Gleichung, in der partielle Ableitungen einer Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *vorkommen. Desweiteren können auch die Funktion u selbst, die unabhängigen Variablen* $x_1, \dots x_n$ *sowie (Koeffizienten-)Funktionen von* $x_1, \dots, x_n$ *vorkommen. Dabei ist* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen.*

1.2. Was ist eine partielle DGl?

Pseudo-Definition

Eine partielle Differentialgleichung (pDGl) ist eine Gleichung, in der partielle Ableitungen einer Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^l$ vorkommen. Desweiteren können auch die Funktion u selbst, die unabhängigen Variablen $x_1, \ldots x_n$ sowie (Koeffizienten-)Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beispiel Wellengleichung: $n = 2$, $l = 1$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
Anstatt (x_1, x_2) benutze die Variablen (x, t). Sei

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & u(x, t) \end{cases}$$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

1.2. Was ist eine partielle DGl?

Pseudo-Definition

Eine partielle Differentialgleichung (pDGl) ist eine Gleichung, in der partielle Ableitungen einer Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^l$ vorkommen. Desweiteren können auch die Funktion u selbst, die unabhängigen Variablen $x_1, \dots x_n$ sowie (Koeffizienten-)Funktionen von $x_1, \dots, x_n$ vorkommen. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beispiel Wellengleichung: $n = 2$, $l = 1$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
Anstatt (x_1, x_2) benutze die Variablen (x, t). Sei

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & u(x, t) \end{cases}$$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

u heisst Lösung der Wellengleichung

(1) $$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

falls gilt: $u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

1.2. Was ist eine partielle DGl?

Pseudo-Definition

Eine partielle Differentialgleichung (pDGl) ist eine Gleichung, in der partielle Ableitungen einer Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^l$ vorkommen. Desweiteren können auch die Funktion u selbst, die unabhängigen Variablen $x_1, \ldots x_n$ sowie (Koeffizienten-)Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beispiel Wellengleichung: $n = 2$, $l = 1$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
Anstatt (x_1, x_2) benutze die Variablen (x, t). Sei

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & u(x,t) \end{cases}$$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

u heisst Lösung der Wellengleichung

(1) $$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

falls gilt: $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.
$t =$Zeit, $x =$Ort. (1) heisst eindimensionale Wellengleichung.

1.2. Was ist eine partielle DGl?

Pseudo-Definition

Eine partielle Differentialgleichung (pDGl) ist eine Gleichung, in der partielle Ableitungen einer Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^l$ vorkommen. Desweiteren können auch die Funktion u selbst, die unabhängigen Variablen $x_1, \ldots x_n$ sowie (Koeffizienten-)Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beispiel Wellengleichung: $n = 2$, $l = 1$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Anstatt (x_1, x_2) benutze die Variablen (x, t). Sei

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & u(x, t) \end{cases}$$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

u heisst Lösung der Wellengleichung

(1) $$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Alternative Schreibweise für (1): $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

1.3. Woher kommen pDGlen? Welche Fragen stellen sich bei pDGlen?

Physik: Quantenmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik, Elastizitätstheorie, Optik, Flüssigkeits- und Gasdynamik, Kristallbildung, Wasserwellen usw.

Biologie: Populationsdynamik, Musterbildung (Morphogenese), Räuber-Beute-Modelle, Ausbreitung von Krankheiten

Chemie: Reaktionskinetik, Reaktions-Diffusionsmodelle

Finanzmathematik: Bestimmung von Optionspreisen (Black Scholes Modell), stochastische Differentialgleichungen

Geometrie: Bestimmung von Flächen vorgegebener mittlerer oder Gaußscher Krümmung, Beweis der Poincaré-Vermutung

1.3. Woher kommen pDGlen? Welche Fragen stellen sich bei pDGlen?

Physik: Quantenmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik, Elastizitätstheorie, Optik, Flüssigkeits- und Gasdynamik, Kristallbildung, Wasserwellen usw.

Biologie: Populationsdynamik, Musterbildung (Morphogenese), Räuber-Beute-Modelle, Ausbreitung von Krankheiten

Chemie: Reaktionskinetik, Reaktions-Diffusionsmodelle

Finanzmathematik: Bestimmung von Optionspreisen (Black Scholes Modell), stochastische Differentialgleichungen

Geometrie: Bestimmung von Flächen vorgegebener mittlerer oder Gaußscher Krümmung, Beweis der Poincaré-Vermutung

1.3. Woher kommen pDGlen? Welche Fragen stellen sich bei pDGlen?

Physik: Quantenmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik, Elastizitätstheorie, Optik, Flüssigkeits- und Gasdynamik, Kristallbildung, Wasserwellen usw.

Biologie: Populationsdynamik, Musterbildung (Morphogenese), Räuber-Beute-Modelle, Ausbreitung von Krankheiten

Chemie: Reaktionskinetik, Reaktions-Diffusionsmodelle

Finanzmathematik: Bestimmung von Optionspreisen (Black Scholes Modell), stochastische Differentialgleichungen

Geometrie: Bestimmung von Flächen vorgegebener mittlerer oder Gaußscher Krümmung, Beweis der Poincaré-Vermutung

1.3. Woher kommen pDGlen?
Welche Fragen stellen sich bei pDGlen?

Physik: Quantenmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik, Elastizitätstheorie, Optik, Flüssigkeits- und Gasdynamik, Kristallbildung, Wasserwellen usw.

Biologie: Populationsdynamik, Musterbildung (Morphogenese), Räuber-Beute-Modelle, Ausbreitung von Krankheiten

Chemie: Reaktionskinetik, Reaktions-Diffusionsmodelle

Finanzmathematik: Bestimmung von Optionspreisen (Black Scholes Modell), stochastische Differentialgleichungen

Geometrie: Bestimmung von Flächen vorgegebener mittlerer oder Gaußscher Krümmung, Beweis der Poincaré-Vermutung

1.3. Woher kommen pDGlen? Welche Fragen stellen sich bei pDGlen?

Physik: Quantenmechanik, Elektrodynamik, Thermodynamik, Elastizitätstheorie, Optik, Flüssigkeits- und Gasdynamik, Kristallbildung, Wasserwellen usw.

Biologie: Populationsdynamik, Musterbildung (Morphogenese), Räuber-Beute-Modelle, Ausbreitung von Krankheiten

Chemie: Reaktionskinetik, Reaktions-Diffusionsmodelle

Finanzmathematik: Bestimmung von Optionspreisen (Black Scholes Modell), stochastische Differentialgleichungen

Geometrie: Bestimmung von Flächen vorgegebener mittlerer oder Gaußscher Krümmung, Beweis der Poincaré-Vermutung

Fragestellungen

Explizite Lösungen sind die Ausnahme!

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit oder Vielfachheit von Lösungen
- Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten
- qualitative Aussagen über Lösungen; Verhalten für grosse Zeiten; Aussagen über die Gestalt der Lösungen
- Bestimmung von Näherungen (-> Numerik)

Fragestellungen

Explizite Lösungen sind die Ausnahme!

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit oder Vielfachheit von Lösungen
- Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten
- qualitative Aussagen über Lösungen; Verhalten für grosse Zeiten; Aussagen über die Gestalt der Lösungen
- Bestimmung von Näherungen (-> Numerik)

Fragestellungen

Explizite Lösungen sind die Ausnahme!

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit oder Vielfachheit von Lösungen
- Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten
- qualitative Aussagen über Lösungen; Verhalten für grosse Zeiten; Aussagen über die Gestalt der Lösungen
- Bestimmung von Näherungen (-> Numerik)

Fragestellungen

Explizite Lösungen sind die Ausnahme!

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit oder Vielfachheit von Lösungen
- Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten
- qualitative Aussagen über Lösungen; Verhalten für grosse Zeiten; Aussagen über die Gestalt der Lösungen
- Bestimmung von Näherungen (-> Numerik)

Fragestellungen

Explizite Lösungen sind die Ausnahme!

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit oder Vielfachheit von Lösungen
- Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten
- qualitative Aussagen über Lösungen; Verhalten für grosse Zeiten; Aussagen über die Gestalt der Lösungen
- Bestimmung von Näherungen (-> Numerik)

Fragestellungen

Explizite Lösungen sind die Ausnahme!

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit oder Vielfachheit von Lösungen
- Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten
- qualitative Aussagen über Lösungen; Verhalten für grosse Zeiten; Aussagen über die Gestalt der Lösungen
- Bestimmung von Näherungen (-> Numerik)

1.4. Beispiele von pDGLen

Karlsruhe Institute of Technology

(a) Transportgleichung:

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$. $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

1.4. Beispiele von pDGLen

(a) Transportgleichung:

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$. $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

$c \in \mathbb{R}^n$: Wind konstanter Stärke und Richtung, der auf den Stoff wirkt.

1.4. Beispiele von pDGLen

(a) Transportgleichung:

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$. $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

$c \in \mathbb{R}^n$: Wind konstanter Stärke und Richtung, der auf den Stoff wirkt.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen: $M(D) =$ Stoffmenge in D zum Zeitpunkt t

1.4. Beispiele von pDGLen

(a) Transportgleichung:

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$. $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

$c \in \mathbb{R}^n$: Wind konstanter Stärke und Richtung, der auf den Stoff wirkt.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen: $M(D) =$ Stoffmenge in D zum Zeitpunkt t

$$M(D) = \int_D u(x,t)\,dx$$

1.4. Beispiele von pDGLen

Karlsruhe Institute of Technology

(a) Transportgleichung:

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$. $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

$c \in \mathbb{R}^n$: Wind konstanter Stärke und Richtung, der auf den Stoff wirkt.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen: $M(D) =$ Stoffmenge in D zum Zeitpunkt t

$$M(D) = \int_D u(x,t)\,dx = \int_{D+c\tau} u(x,t+\tau)\,dx,$$

wobei $\tau > 0$ eine beliebige Zeitspanne ist.
(Annahme: nichts geht verloren, nichts kommt dazu).

1.4. Beispiele von pDGLen

(a) Transportgleichung:

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$. $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

$c \in \mathbb{R}^n$: Wind konstanter Stärke und Richtung, der auf den Stoff wirkt.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen: $M(D) =$ Stoffmenge in D zum Zeitpunkt t

$$M(D) = \int_D u(x,t)\,dx = \int_{D+c\tau} u(x,t+\tau)\,dx,$$

wobei $\tau > 0$ eine beliebige Zeitspanne ist.
(Annahme: nichts geht verloren, nichts kommt dazu).
Substitution: $x = \xi + c\tau$, $\xi \in D$

$$M(D) = \int_D u(x,t)\,dx = \int_D u(\xi + c\tau, t+\tau)\,d\xi$$

1.4. Beispiele von pDGLen

(a) Transportgleichung:

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$. $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

$c \in \mathbb{R}^n$: Wind konstanter Stärke und Richtung, der auf den Stoff wirkt.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen: $M(D) =$ Stoffmenge in D zum Zeitpunkt t

$$M(D) = \int_D u(x,t)\,dx = \int_{D+c\tau} u(x,t+\tau)\,dx,$$

wobei $\tau > 0$ eine beliebige Zeitspanne ist.
(Annahme: nichts geht verloren, nichts kommt dazu).
Substitution: $x = \xi + c\tau$, $\xi \in D$

$$M(D) = \int_D u(x,t)\,dx = \int_D u(x + c\tau, t+\tau)\,dx$$

1.4. Beispiele von pDGLen

(a) Transportgleichung:

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ am Ort $x \in \mathbb{R}^n$. $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

$c \in \mathbb{R}^n$: Wind konstanter Stärke und Richtung, der auf den Stoff wirkt.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen: $M(D) =$ Stoffmenge in D zum Zeitpunkt t

$$M(D) = \int_D u(x,t)\,dx = \int_{D+c\tau} u(x,t+\tau)\,dx,$$

wobei $\tau > 0$ eine beliebige Zeitspanne ist.
(Annahme: nichts geht verloren, nichts kommt dazu).
Substitution: $x = \xi + c\tau,\ \xi \in D$

$$M(D) = \int_D u(x,t)\,dx = \int_D u(x + c\tau, t+\tau)\,dx$$

Differentiation nach τ und Auswertung bei $\tau = 0$:

Transportgleichung:

$$\frac{d}{d\tau}\int_D u(x,t)\,dx = \frac{d}{d\tau}\int_D u(x+c\tau, t+\tau)\,dx$$

Transportgleichung:

$$\frac{d}{d\tau}\int_D u(x,t)\,dx = \frac{d}{d\tau}\int_D u(x+c\tau, t+\tau)\,dx$$

$$0 = \int_D \frac{d}{d\tau}\Big(u(x+c\tau, t+\tau)\Big)\,dx$$

Transportgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\int_D u(x,t)\,dx &= \frac{d}{d\tau}\int_D u(x+c\tau,t+\tau)\,dx \\
0 &= \int_D \frac{d}{d\tau}\Big(u(x+c\tau,t+\tau)\Big)\,dx \\
&= \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+c\tau,t+\tau)c_i + \frac{\partial u}{\partial t}(x+c\tau,t+\tau)\,dx
\end{aligned}$$

Transportgleichung:

$$\frac{d}{d\tau}\int_D u(x,t)\,dx = \frac{d}{d\tau}\int_D u(x+c\tau, t+\tau)\,dx$$

$$0 = \int_D \frac{d}{d\tau}\Big(u(x+c\tau, t+\tau)\Big)\,dx$$

$$= \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+c\tau, t+\tau)c_i + \frac{\partial u}{\partial t}(x+c\tau, t+\tau)\,dx$$

Setze $\tau = 0$:

$$0 = \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)c_i + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx$$

Transportgleichung:

$$\frac{d}{d\tau}\int_D u(x,t)\,dx = \frac{d}{d\tau}\int_D u(x+c\tau, t+\tau)\,dx$$

$$0 = \int_D \frac{d}{d\tau}\Big(u(x+c\tau,t+\tau)\Big)\,dx$$

$$= \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+c\tau,t+\tau)c_i + \frac{\partial u}{\partial t}(x+c\tau,t+\tau)\,dx$$

Setze $\tau = 0$:

$$0 = \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)c_i + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig: $\Rightarrow$

Transportgleichung:

$$\frac{d}{d\tau}\int_D u(x,t)\,dx = \frac{d}{d\tau}\int_D u(x+c\tau, t+\tau)\,dx$$

$$0 = \int_D \frac{d}{d\tau}\Big(u(x+c\tau, t+\tau)\Big)\,dx$$

$$= \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+c\tau, t+\tau)c_i + \frac{\partial u}{\partial t}(x+c\tau, t+\tau)\,dx$$

Setze $\tau = 0$:

$$0 = \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)c_i + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig: $\Rightarrow$

Transportgleichung: $$\boxed{(2) \qquad \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0}$$

Transportgleichung:

Karlsruhe Institute of Technology

Transportgleichung:

$$\boxed{(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0}$$

Transportgleichung:

Transportgleichung: $\boxed{(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0}$

Kurz:

$$C \cdot \operatorname{grad} u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \text{konstant}$$

Transportgleichung:

Transportgleichung: $$\boxed{(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0}$$

Kurz:

$$C \cdot \operatorname{grad} u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \text{konstant}$$

Verallg. Transportgleichung: $$\boxed{(3) \quad \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0}$$

(b) Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \geq 0$ am Ort $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
$u : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei C^1-Funktion.

(b) Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \geq 0$ am Ort $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
$u : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei C^1-Funktion.

Diffusion

Mechanismus, der Unterschiede in Stoffkonzentrationen ausgleicht.

(b) Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \geq 0$ am Ort $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
$u : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei C^1-Funktion.

Diffusion

Mechanismus, der Unterschiede in Stoffkonzentrationen ausgleicht.

Wir betrachten folgendens Modell für Diffusion:

(b) Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung

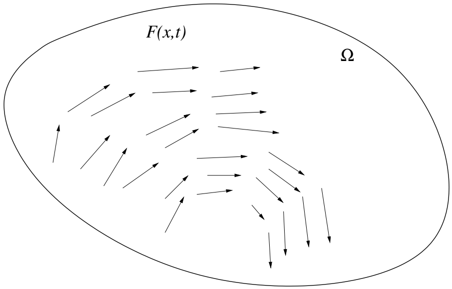
Karlsruhe Institute of Technology

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \geq 0$ am Ort $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
$u : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei C^1-Funktion.

Diffusion

Mechanismus, der Unterschiede in Stoffkonzentrationen ausgleicht.

Wir betrachten folgendens Modell für Diffusion:



$F(x,t) \in \mathbb{R}^n$: Richtung und Stärke der Stoffzufuhr pro Zeiteinheit durch $x \in \Omega$ zum Zeitpunkt t

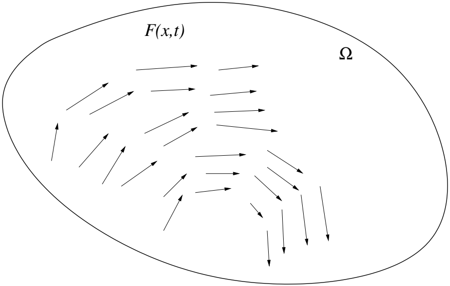
(b) Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung

$u(x,t) =$ Stoffkonzentration zur Zeit $t \geq 0$ am Ort $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
$u : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei C^1-Funktion.

Diffusion

Mechanismus, der Unterschiede in Stoffkonzentrationen ausgleicht.

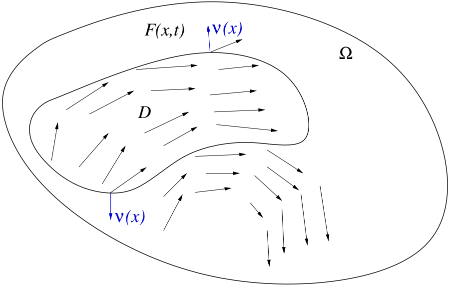
Wir betrachten folgendens Modell für Diffusion:



$F(x,t) \in \mathbb{R}^n$: Richtung und Stärke der Stoffzufuhr pro Zeiteinheit durch $x \in \Omega$ zum Zeitpunkt t
$f(x,t) \in \mathbb{R}$: Reaktionsterm. Gibt Erzeugungs- ($f > 0$) oder Vernichtungsrate ($f < 0$) des Stoffes an der Stelle x zur Zeit t an. Kann abhängen von x, t (später auch von der aktuellen Stoffmenge $u(x,t)$).

Herleitung der Diffusionsgleichung

Sei $D \subset \Omega$ ein Normalgebiet, ν=äussere Normale an ∂D



$$\int_D u(x,t)\,dx =$$

Stoffmenge in D zum Zeitpunkt t

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx}_{\text{Änderung der Stoffmenge}} = \underbrace{-\oint_{\partial D} F(x,t)\cdot\nu(x)\,do}_{\text{Zufuhr/Abfluss durch }\partial D} + \underbrace{\int_D f(x,t)\,dx}_{\text{Reaktionsterm}}$$

$F \cdot \nu > 0$: Abfluss, $\quad F \cdot \nu < 0$: Zufuhr

Herleitung der Diffusionsgleichung – Forts.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx}_{\text{Änderung der Stoffmenge}} = \underbrace{-\oint_{\partial D} F(x,t)\cdot\nu(x)\,do}_{\text{Zufuhr/Abfluss durch }\partial D} + \underbrace{\int_D f(x,t)\,dx}_{\text{Reaktionsterm}}$$

Herleitung der Diffusionsgleichung – Forts.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx}_{\text{Änderung der Stoffmenge}} = \underbrace{-\oint_{\partial D} F(x,t)\cdot\nu(x)\,do}_{\text{Zufuhr/Abfluss durch }\partial D} + \underbrace{\int_D f(x,t)\,dx}_{\text{Reaktionsterm}}$$

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx$$

Herleitung der Diffusionsgleichung – Forts.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx}_{\text{Änderung der Stoffmenge}} = \underbrace{-\oint_{\partial D} F(x,t)\cdot\nu(x)\,do}_{\text{Zufuhr/Abfluss durch } \partial D} + \underbrace{\int_D f(x,t)\,dx}_{\text{Reaktionsterm}}$$

Gaußscher-Integralsatz: $\longrightarrow \downarrow$

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx = \int_D \Big(-\operatorname{div}_x F(x,t) + f(x,t)\Big)dx$$

Herleitung der Diffusionsgleichung – Forts.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx}_{\text{Änderung der Stoffmenge}} = \underbrace{-\oint_{\partial D} F(x,t)\cdot\nu(x)\,do}_{\text{Zufuhr/Abfluss durch }\partial D} + \underbrace{\int_D f(x,t)\,dx}_{\text{Reaktionsterm}}$$

Gaußscher-Integralsatz: ⟶ ↓

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx = \int_D \Big(-\operatorname{div}_x F(x,t) + f(x,t)\Big)dx$$

$D \subset \Omega$ beliebig $\Rightarrow$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\operatorname{div}_x F(x,t) + f(x,t)$$

Herleitung der Diffusionsgleichung – Forts.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx}_{\text{Änderung der Stoffmenge}} = \underbrace{-\oint_{\partial D} F(x,t)\cdot\nu(x)\,do}_{\text{Zufuhr/Abfluss durch }\partial D} + \underbrace{\int_D f(x,t)\,dx}_{\text{Reaktionsterm}}$$

Gaußscher-Integralsatz: $\longrightarrow\downarrow$

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\,dx = \int_D \Big(-\operatorname{div}_x F(x,t) + f(x,t)\Big)dx$$

$D\subset\Omega$ beliebig $\Rightarrow$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\operatorname{div}_x F(x,t) + f(x,t)$$

Kurz (später werden wir das etwas anders schreiben):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$$

Modellierung der Diffusion

Bisher:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$$

Modellierung der Diffusion

Bisher:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$$

Annahme an unser Diffusionsmodell: F ist proportional zu $\mathrm{grad}_x u$, d.h.

$$F(x,t) = -d\,\mathrm{grad}_x u(x,t), \quad d = \text{ Diffusionskonstante} > 0.$$

Modellierung der Diffusion

Bisher:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$$

Annahme an unser Diffusionsmodell: F ist proportional zu $\operatorname{grad}_x u$, d.h.

$$F(x,t) = -d \operatorname{grad}_x u(x,t), \quad d = \text{ Diffusionskonstante} > 0.$$

Ergebnis:

Diffusionsgleichung: $\boxed{(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta_x u + f}$

wobei Δ_x=Laplace Operator in den Ortskoordinaten $x_1, \ldots, x_n$ ist.

Modellierung der Diffusion

Karlsruhe Institute of Technology

Bisher:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$$

Annahme an unser Diffusionsmodell: F ist proportional zu $\operatorname{grad}_x u$, d.h.

$$F(x,t) = -d \operatorname{grad}_x u(x,t), \quad d = \text{ Diffusionskonstante} > 0.$$

Ergebnis:

Diffusionsgleichung: $\boxed{(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta_x u + f}$

wobei Δ_x=Laplace Operator in den Ortskoordinaten $x_1, \ldots, x_n$ ist.
Bemerkung: anstatt $\Delta_x u$ schreibt man Δu
Man weiss ja (hoffentlich) was man meint!

Verallgemeinerungen

Fluß $F = F_1 + F_2, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$

Verallgemeinerungen

Fluß $F = F_1 + F_2$, $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$

$F_1(x,t) = -d \,\mathrm{grad} u(x,t), \quad d =$ Diffusionskonstante

Verallgemeinerungen

Fluß $F = F_1 + F_2$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$

$F_1(x,t) = -d \operatorname{grad} u(x,t), \quad d =$ Diffusionskonstante

$F_2(x,t) = Cu(x,t), \quad C = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n =$ Konvektionskonstante

Verallgemeinerungen

Fluß $F = F_1 + F_2$, $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$

$F_1(x,t) = -d\,\mathrm{grad}\,u(x,t)$, $\quad d =$ Diffusionskonstante

$F_2(x,t) = Cu(x,t)$, $\quad C = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n =$ Konvektionskonstante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - \underbrace{C \cdot \mathrm{grad}\,u}_{\text{Transportterm}} + f$$

vgl. Transportgleichung.

Verallgemeinerungen

Fluß $F = F_1 + F_2$, $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$

$F_1(x,t) = -d\,\mathrm{grad} u(x,t), \quad d =$ Diffusionskonstante

$F_2(x,t) = Cu(x,t), \quad C = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n =$ Konvektionskonstante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - \underbrace{C \cdot \mathrm{grad} u}_{\text{Transportterm}} + f$$

vgl. Transportgleichung.

Sowohl die Diffusion- als auch die Konvektionskonstanten können von x, t abhängen. Ausserdem: f kann von x, t und $u(x,t)$ abhängen.

Ferner: $d = (d_{ij})_{i,j=1}^n$ ist i.A. eine Matrix mit Koeffizienten $d_{ij}(x,t)$.

Verallgemeinerungen

Fluß $F = F_1 + F_2$, $\quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}_x F + f$

$F_1(x,t) = -d\,\mathrm{grad}u(x,t)$, $\quad d =$ Diffusionskonstante

$F_2(x,t) = Cu(x,t)$, $\quad C = (c_1,\ldots,c_n) \in \mathbb{R}^n =$ Konvektionskonstante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - \underbrace{C \cdot \mathrm{grad}u}_{\text{Transportterm}} + f$$

vgl. Transportgleichung.

Sowohl die Diffusion- als auch die Konvektionskonstanten können von x, t abhängen. Ausserdem: f kann von x, t und $u(x,t)$ abhängen.

Ferner: $d = (d_{ij})_{i,j=1}^n$ ist i.A. eine Matrix mit Koeffizienten $d_{ij}(x,t)$.

$$(5) \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\Big(d(x,t)\mathrm{grad}u\Big) - C(x,t) \cdot \mathrm{grad}u + f(x,t,u)}$$

Allgemeine Diffusions-Konvektions-Reaktionsgleichung

Spezialfälle von $u_t = d\Delta u + f(x,t,u)$

(i) $f \equiv 0$; homogene Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$\boxed{(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u}$$

Spezialfälle von $u_t = d\Delta u + f(x,t,u)$

(i) $f \equiv 0$; homogene Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$\boxed{(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u}$$

(ii) f hängt nur von x, t aber nicht von u ab: inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$f : \begin{cases} \Omega \times [0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{cases}$$

$$\boxed{(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(x,t)}$$

Spezialfälle von $u_t = d\Delta u + f(x,t,u)$

(i) $f \equiv 0$; homogene Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$\boxed{(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u}$$

(iii) f hängt nur von x, t und linear von u ab: lineare, inhomogene Diffusionsgleichung

$$f : \begin{cases} \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t,s) & \mapsto & c(x,t)s + f_0(x,t) \end{cases}$$

$$\boxed{(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + c(x,t)u + f_0(x,t)}$$

$c(x,t)$ = relative Wachstums-/Vernichtungsrate
$f_0(x,t)$ = absolute Wachstums-/Vernichtungsrate

Vergleich mit gewöhnlicher DGl

partielle DGl.

$$\boxed{(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + c(x,t)u + f_0(x,t)}$$

gewöhnliche DGl.

$$\boxed{(8') \quad \dot{u} = c(t)u + f_0(t), \quad u(0) = u_0}$$

Vergleich mit gewöhnlicher DGI

partielle DGl. $\boxed{(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + c(x,t)u + f_0(x,t)}$

gewöhnliche DGl. $\boxed{(8') \quad \dot{u} = c(t)u + f_0(t), \quad u(0) = u_0}$

Lösung der gewöhnlichen DGl.:

$$u(t) = u_0 e^{\int_0^t c(s)\,ds} + \int_0^t f_0(\tau) e^{-\int_t^\tau c(s)\,ds} d\tau$$

und falls $c =$konstant

$$u(t) = u_0 e^{ct} + \int_0^t f_0(\tau) e^{c(t-\tau)} d\tau$$

Vergleich mit gewöhnlicher DGl

partielle DGl. $\boxed{(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + c(x,t)u + f_0(x,t)}$

gewöhnliche DGl. $\boxed{(8') \quad \dot{u} = c(t)u + f_0(t), \quad u(0) = u_0}$

Lösung der gewöhnlichen DGl.:

$$u(t) = u_0 e^{\int_0^t c(s)\,ds} + \int_0^t f_0(\tau) e^{-\int_t^\tau c(s)\,ds} d\tau$$

und falls $c =$konstant

$$u(t) = u_0 e^{ct} + \int_0^t f_0(\tau) e^{c(t-\tau)} d\tau$$

Gilt etwas Ähnliches für die partielle DGl.? Wir werden sehen....

Die 1-dimensionale Diffusionsgleichung

$n = 1$, $x_1 < x$. Betrachte das Intervall $D = (x_1, x)$. Hier bedeutet:
$F(\xi, t) > 0$: Material fließt am Punkt ξ von links nach rechts
$F(\xi, t) < 0$: Material fließt am Punkt ξ von rechts nach links

Die 1-dimensionale Diffusionsgleichung

$n = 1$, $x_1 < x$. Betrachte das Intervall $D = (x_1, x)$. Hier bedeutet:
$F(\xi, t) > 0$: Material fließt am Punkt ξ von links nach rechts
$F(\xi, t) < 0$: Material fließt am Punkt ξ von rechts nach links

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x} u(\xi, t)\, d\xi}_{= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t)\, d\xi} = -F(x, t) + F(x_1, t) + \int_{x_1}^{x} f(\dots)\, d\xi$$

Die 1-dimensionale Diffusionsgleichung

$n = 1$, $x_1 < x$. Betrachte das Intervall $D = (x_1, x)$. Hier bedeutet:
$F(\xi, t) > 0$: Material fließt am Punkt ξ von links nach rechts
$F(\xi, t) < 0$: Material fließt am Punkt ξ von rechts nach links

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x} u(\xi, t)\, d\xi}_{= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t)\, d\xi} = -F(x, t) + F(x_1, t) + \int_{x_1}^{x} f(\ldots)\, d\xi$$

Differentiation $\frac{d}{dx}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{d}{dx} F(x, t) + f(x, t, u(x, t))$$

Die 1-dimensionale Diffusionsgleichung

Karlsruhe Institute of Technology

$n = 1$, $x_1 < x$. Betrachte das Intervall $D = (x_1, x)$. Hier bedeutet:
$F(\xi, t) > 0$: Material fließt am Punkt ξ von links nach rechts
$F(\xi, t) < 0$: Material fließt am Punkt ξ von rechts nach links

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x} u(\xi, t)\, d\xi}_{} = -F(x, t) + F(x_1, t) + \int_{x_1}^{x} f(\ldots)\, d\xi$$

$$= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t)\, d\xi$$

Differentiation $\frac{d}{dx}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{d}{dx}F(x, t) + f(x, t, u(x, t))$$

Modellierung: $F(x, t) = -d\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$

Die 1-dimensionale Diffusionsgleichung

$n = 1$, $x_1 < x$. Betrachte das Intervall $D = (x_1, x)$. Hier bedeutet:
$F(\xi, t) > 0$: Material fließt am Punkt ξ von links nach rechts
$F(\xi, t) < 0$: Material fließt am Punkt ξ von rechts nach links

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x} u(\xi,t)\,d\xi}_{} = -F(x,t) + F(x_1,t) + \int_{x_1}^{x} f(\ldots)\,d\xi$$

$$= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t)\,d\xi$$

Differentiation $\frac{d}{dx}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{d}{dx}F(x,t) + f(x,t,u(x,t))$$

Modellierung: $F(x,t) = -d\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$

1-dimensionale Diffusionsgleichung: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t,u(x,t))}$

Die 1-dimensionale Diffusionsgleichung

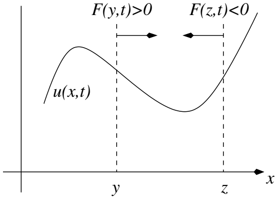
$n = 1$, $x_1 < x$. Betrachte das Intervall $D = (x_1, x)$. Hier bedeutet:
$F(\xi, t) > 0$: Material fließt am Punkt ξ von links nach rechts
$F(\xi, t) < 0$: Material fließt am Punkt ξ von rechts nach links

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x} u(\xi,t)\,d\xi}_{} = -F(x,t) + F(x_1,t) + \int_{x_1}^{x} f(\ldots)\,d\xi$$

$$= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t)\,d\xi$$

Differentiation $\frac{d}{dx}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{d}{dx}F(x,t) + f(x,t,u(x,t))$$



Modellierung: $F(x,t) = -d\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$

1-dimensionale Diffusionsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t,u(x,t))}$$

Kontext

In physikalischem, chemischem, biologischem Kontext:

$$u(x,t) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

Kontext

In physikalischem, chemischem, biologischem Kontext:

$$u(x,t) = \begin{cases} \text{Wärmemenge [(6) heisst auch Wärmeleitungsgleichung]} \\ \\ \end{cases}$$

Kontext

In physikalischem, chemischem, biologischem Kontext:

$$u(x,t) = \begin{cases} \text{Wärmemenge [(6) heisst auch Wärmeleitungsgleichung]} \\ \text{Konzenration einer Chemikalie} \\ \end{cases}$$

Kontext

In physikalischem, chemischem, biologischem Kontext:

$$u(x,t) = \begin{cases} \text{Wärmemenge [(6) heisst auch Wärmeleitungsgleichung]} \\ \text{Konzenration einer Chemikalie} \\ \text{Dichte einer Population} \end{cases}$$

Kontext

In physikalischem, chemischem, biologischem Kontext:

$$u(x,t) = \begin{cases} \text{Wärmemenge [(6) heisst auch Wärmeleitungsgleichung]} \\ \text{Konzenration einer Chemikalie} \\ \text{Dichte einer Population} \end{cases}$$

Der Diffusionsmechanismus (=Konzentrationsausgleich) kann in viele Modelle leicht eingebaut werden:

Kontext

In physikalischem, chemischem, biologischem Kontext:

$$u(x,t) = \begin{cases} \text{Wärmemenge [(6) heisst auch Wärmeleitungsgleichung]} \\ \text{Konzenration einer Chemikalie} \\ \text{Dichte einer Population} \end{cases}$$

Der Diffusionsmechanismus (=Konzentrationsausgleich) kann in viele Modelle leicht eingebaut werden:

Logistische DGl.

$$\dot{u} = u(\alpha - \beta u)$$

$u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$
gewöhnliche DGl.

Kontext

In physikalischem, chemischem, biologischem Kontext:

$$u(x,t) = \begin{cases} \text{Wärmemenge [(6) heisst auch Wärmeleitungsgleichung]} \\ \text{Konzenration einer Chemikalie} \\ \text{Dichte einer Population} \end{cases}$$

Der Diffusionsmechanismus (=Konzentrationsausgleich) kann in viele Modelle leicht eingebaut werden:

<u>Logistische DGl.</u>

$$\dot{u} = u(\alpha - \beta u)$$

$u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$
gewöhnliche DGl.

<u>Logistische DGl. mit Diffusion</u>

$$(9) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + u(\alpha - \beta u)$$

$u : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$
partielle DGl.

Diffusion beim Räuber-Beute Modell

Räuber-Beute Modell

$$\begin{cases} \dot{u} & = & u(a - bv) \\ \dot{v} & = & v(-c + du) \end{cases}$$

gekoppeltes System gewöhnlicher DGlen.

Diffusion beim Räuber-Beute Modell

Räuber-Beute Modell

$$\begin{cases} \dot{u} &= u(a - bv) \\ \dot{v} &= v(-c + du) \end{cases}$$

gekoppeltes System gewöhnlicher DGlen.

Räuber-Beute Modell mit Diffusion

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + u(a - bv) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &= d_2 \Delta v + v(-c + du) \end{cases}$$

gekoppeltes System partieller DGlen.

Diffusion beim Räuber-Beute Modell

Räuber-Beute Modell

$$\begin{cases} \dot{u} &= u(a - bv) \\ \dot{v} &= v(-c + du) \end{cases}$$

gekoppeltes System gewöhnlicher DGlen.

Räuber-Beute Modell mit Diffusion

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + u(a - bv) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &= d_2 \Delta v + v(-c + du) \end{cases}$$

gekoppeltes System partieller DGlen.

Diffusion

Diffusion = Mobilität der Population, d.h. Mitglieder der Population tendieren dazu, Stellen hoher Konzentration von Artgenossen zu verlassen und sich zu Stellen niedrigerer Konzentration zu bewegen.

Diffusion beim Räuber-Beute Modell

Räuber-Beute Modell

$$\begin{cases} \dot{u} &= u(a - bv) \\ \dot{v} &= v(-c + du) \end{cases}$$

gekoppeltes System gewöhnlicher DGlen.

Räuber-Beute Modell mit Diffusion

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + u(a - bv) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} &= d_2 \Delta v + v(-c + du) \end{cases}$$

gekoppeltes System partieller DGlen.

Diffusion

Diffusion = Mobilität der Population, d.h. Mitglieder der Population tendieren dazu, Stellen hoher Konzentration von Artgenossen zu verlassen und sich zu Stellen niedrigerer Konzentration zu bewegen.

Achtung: in manchen Modellen ist man am genauen Gegenteil intersessiert: Aggregationsphänomene!