

## 2. Vorlesung: Klassische Methoden für partielle Differentialgleichungen

Wolfgang Reichel

Karlsruhe, 19. Oktober 2016

Institut für Analysis



CRC 1173

Wave  
phenomena

# Beispiele PDGlen – Erinnerung

(a) Transportgleichung:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0$$

Kurz:

$$C \cdot \text{grad} u + u_t = 0, \quad C = (c_1, \dots, c_n)^T = \text{konstant}$$

## Beispiele PDGlen – Erinnerung

(a) Transportgleichung:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0$$

Kurz:

$$C \cdot \text{grad}u + u_t = 0, \quad C = (c_1, \dots, c_n)^T = \text{konstant}$$

(b) Diffusionsgleichung:

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = d\Delta u(x, t) + f(x, t, u(x, t))$$

wobei  $\Delta$ =Laplace Operator in den Ortskoordinaten  $x_1, \dots, x_n$  ist.

Kurz:

$$u_t = d\Delta u + f(x, t, u)$$

# Beispiele PDGlen – Erinnerung

(a) Transportgleichung:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0$$

Kurz:

$$C \cdot \text{grad}u + u_t = 0, \quad C = (c_1, \dots, c_n)^T = \text{konstant}$$

(b) Diffusionsgleichung:

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = d\Delta u(x, t) + f(x, t, u(x, t))$$

wobei  $\Delta$ =Laplace Operator in den Ortskoordinaten  $x_1, \dots, x_n$  ist.

Kurz:

$$u_t = d\Delta u + f(x, t, u)$$

Allgemeine Diffusions-Konvektions-Reaktionsgleichung:

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(d(x, t) \text{grad}u) - C(x, t) \cdot \text{grad}u + f(x, t, u)$$

## Weitere Beispiele (Poisson-/Laplace)

**(c) Laplace bzw. Poissongleichung:** Wir betrachten spezielle Lösungen der Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(x, u)$$

[beachte: der Reaktionsterm darf hier nicht von der Zeit  $t$  abhängen!]

## Weitere Beispiele (Poisson-/Laplace)

**(c) Laplace bzw. Poissongleichung:** Wir betrachten spezielle Lösungen der Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(x, u)$$

[beachte: der Reaktionsterm darf hier nicht von der Zeit  $t$  abhängen!]

Gesucht sind Lösungen der Form  $u(x, t) = v(x)$ , d.h. zeitunabhängige Lösungen.

## Weitere Beispiele (Poisson-/Laplace)

**(c) Laplace bzw. Poissongleichung:** Wir betrachten spezielle Lösungen der Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(x, u)$$

[beachte: der Reaktionsterm darf hier nicht von der Zeit  $t$  abhängen!]

Gesucht sind Lösungen der Form  $u(x, t) = v(x)$ , d.h. zeitunabhängige Lösungen. Da  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ , muss  $v$  die Gleichung

$$0 = d\Delta v(x) + f(x, v(x)), \quad x \in \Omega$$

erfüllen. Hier können wir o.B.d.A.  $d = 1$  annehmen.

# Poisson- bzw. Laplacegleichung

$$0 = \underbrace{d}_{=1} \Delta v(x) + f(x, v(x)), \quad x \in \Omega$$



# Poisson- bzw. Laplacegleichung

$$0 = \underbrace{d}_{=1} \Delta v(x) + f(x, v(x)), \quad x \in \Omega$$

Die Gleichung

$$(10) \quad -\Delta v = f(x, v) \text{ in } \Omega$$

heisst **(nichtlineare) Poissongleichung**.

# Poisson- bzw. Laplacegleichung

$$0 = \underbrace{d}_{=1} \Delta v(x) + f(x, v(x)), \quad x \in \Omega$$

Die Gleichung

$$(10) \quad -\Delta v = f(x, v) \text{ in } \Omega$$

heißt **(nichtlineare) Poissongleichung**.

Hängt  $f$  nur von  $x$  und nicht von  $v$  selbst ab so heißt

$$(11) \quad -\Delta v = f(x) \text{ in } \Omega$$

**lineare Poissongleichung**.

# Poisson- bzw. Laplacegleichung

$$0 = \underbrace{d}_{=1} \Delta v(x) + f(x, v(x)), \quad x \in \Omega$$

Die Gleichung

$$(10) \quad -\Delta v = f(x, v) \text{ in } \Omega$$

heißt **(nichtlineare) Poissongleichung**.

Hängt  $f$  nur von  $x$  und nicht von  $v$  selbst ab so heißt

$$(11) \quad -\Delta v = f(x) \text{ in } \Omega$$

**lineare Poissongleichung**.

Im Fall  $f = 0$  nennt man

$$(12) \quad -\Delta v = 0 \text{ in } \Omega$$

**Laplacegleichung**.

## Ein paar explizite Lösungen

(i)  $n = 2$ ,  $v(x, y) = x^2 - y^2$  (bzw.  $v(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = y$ ) löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2$$

## Ein paar explizite Lösungen

(i)  $n = 2$ ,  $v(x, y) = x^2 - y^2$  (bzw.  $v(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = y$ ) löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2$$

(ii) allgemeiner:  $n \geq 1$ ,  $v(x_1, \dots, x_n) = x_i^2 - x_j^2$  (bzw.  $v(x) = x_i$ ) löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Da die Gleichung linear ist, kann man durch Linearkombinationen neue Lösungen erzeugen. Z.B.  $v(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + cx_3$

## Ein paar explizite Lösungen

(i)  $n = 2$ ,  $v(x, y) = x^2 - y^2$  (bzw.  $v(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = y$ ) löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2$$

(ii) allgemeiner:  $n \geq 1$ ,  $v(x_1, \dots, x_n) = x_i^2 - x_j^2$  (bzw.  $v(x) = x_i$ ) löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Da die Gleichung linear ist, kann man durch Linearkombinationen neue Lösungen erzeugen. Z.B.  $v(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + cx_3$

(iii)  $n = 2$ ,  $v(x, y) = e^x \cos y$  löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2$$

## Ein paar explizite Lösungen

(i)  $n = 2$ ,  $v(x, y) = x^2 - y^2$  (bzw.  $v(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = y$ ) löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2$$

(ii) allgemeiner:  $n \geq 1$ ,  $v(x_1, \dots, x_n) = x_i^2 - x_j^2$  (bzw.  $v(x) = x_i$ ) löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Da die Gleichung linear ist, kann man durch Linearkombinationen neue Lösungen erzeugen. Z.B.  $v(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + cx_3$

(iii)  $n = 2$ ,  $v(x, y) = e^x \cos y$  löst

$$\Delta v = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2$$

(iv)  $n \geq 1$ ,  $v(x) = \frac{1-|x|^2}{2n}$  (hier:  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ) löst

$$-\Delta v = 1 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

und  $v$  ist positiv in  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $v = 0$  auf  $\partial B_1(0)$ .

## Weitere Beispiele

(d) **Maxwell-Gleichungen** (für elektromagnetische Felder):

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}(x, t) \quad \text{elektrisches Feld} \\ \mathcal{H}(x, t) \quad \text{magnetisches Feld} \end{array} \right\} x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}, \mathcal{H} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$



## Weitere Beispiele

(d) **Maxwell-Gleichungen** (für elektromagnetische Felder):

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}(x, t) \quad \text{elektrisches Feld} \\ \mathcal{H}(x, t) \quad \text{magnetisches Feld} \end{array} \right\} x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}, \mathcal{H} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Zwei weitere Felder:

$$\underbrace{\mathcal{D}}_{\text{el. Flußdichte}} = \epsilon \mathcal{E}, \quad \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{mag. Flußdichte}} = \mu \mathcal{H}$$

elektrische Leitfähigkeit:  $\epsilon = \epsilon_0(\text{Vakuum}) \cdot \epsilon_r(\text{Material})$

magnetische Suszeptibilität:  $\mu = \mu_0(\text{Vakuum}) \cdot \mu_r(\text{Material})$

## Weitere Beispiele

(d) **Maxwell-Gleichungen** (für elektromagnetische Felder):

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}(x, t) \quad \text{elektrisches Feld} \\ \mathcal{H}(x, t) \quad \text{magnetisches Feld} \end{array} \right\} x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}, \mathcal{H} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Zwei weitere Felder:

$$\underbrace{\mathcal{D}}_{\text{el. Flußdichte}} = \epsilon \mathcal{E}, \quad \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{mag. Flußdichte}} = \mu \mathcal{H}$$

elektrische Leitfähigkeit:  $\epsilon = \epsilon_0(\text{Vakuum}) \cdot \epsilon_r(\text{Material})$

magnetische Suszeptibilität:  $\mu = \mu_0(\text{Vakuum}) \cdot \mu_r(\text{Material})$

**Maxwell-System:**

$$(13) \quad \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathcal{B} = 0 & \operatorname{div} \mathcal{D} = \rho = \text{Ladungsdichte} \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 & \operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = j = \text{Stromdichte} \end{array}$$

**gegeben:**  $\rho, j$  als Funktionen von  $(x, t)$  sowie  $\epsilon, \mu$  als Funktionen von  $x$

**gesucht:**  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$  bzw.  $\mathcal{D}, \mathcal{B}$

# Spezielle Lösungsansätze

$$(13) \quad \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathcal{B} = 0 & \operatorname{div} \mathcal{D} = \rho = \text{Ladungsdichte} \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 & \operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = j = \text{Stromdichte} \end{array}$$

## Elektrostatik:

$j = 0$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{B} = 0$ , Ladungsdichte  $\rho = \rho(x)$  zeitunabhängig.

# Spezielle Lösungsansätze

$$(13) \quad \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathcal{B} = 0 & \operatorname{div} \mathcal{D} = \rho = \text{Ladungsdichte} \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 & \operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = j = \text{Stromdichte} \end{array}$$

## Elektrostatik:

$j = 0$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{B} = 0$ , Ladungsdichte  $\rho = \rho(x)$  zeitunabhängig.

Ansatz:  $\mathcal{E}(x) = \operatorname{grad} u(x)$  ebenfalls zeitunabhängig.

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} u) = \rho, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0 \text{ automatisch erfüllt}$$

$$(13) \quad \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathcal{B} = 0 & \operatorname{div} \mathcal{D} = \rho = \text{Ladungsdichte} \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 & \operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = j = \text{Stromdichte} \end{array}$$

## Elektrostatik:

$j = 0$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{B} = 0$ , Ladungsdichte  $\rho = \rho(x)$  zeitunabhängig.

Ansatz:  $\mathcal{E}(x) = \operatorname{grad} u(x)$  ebenfalls zeitunabhängig.

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} u) = \rho, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0 \text{ automatisch erfüllt}$$

Im Vakuum:  $\epsilon = \epsilon_0 = \text{const.}$  Damit erhalten wir die **Poissongleichung**

$$\epsilon_0 \Delta u = \rho(x) \text{ im } \mathbb{R}^3$$

# Spezielle Lösungsansätze

(13)	$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0$ $\operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0$	$\operatorname{div} \mathcal{D} = \rho = \text{Ladungsdichte}$ $\operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = j = \text{Stromdichte}$
------	---	--

## Elektrostatik:

$j = 0$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{B} = 0$ , Ladungsdichte  $\rho = \rho(x)$  zeitunabhängig.

Ansatz:  $\mathcal{E}(x) = \operatorname{grad} u(x)$  ebenfalls zeitunabhängig.

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} u) = \rho, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0 \text{ automatisch erfüllt}$$

Im Vakuum:  $\epsilon = \epsilon_0 = \text{const.}$  Damit erhalten wir die **Poissongleichung**

$$\epsilon_0 \Delta u = \rho(x) \text{ im } \mathbb{R}^3$$

In allg. Materialien  $\epsilon = \epsilon(x)$  erhalten wir die **verallg. Poissongleichung**

$$\operatorname{div}(\epsilon(x) \operatorname{grad} u) = \rho(x) \text{ im } \mathbb{R}^3$$

# Spezielle Lösungsansätze – Forts.

$$(13) \quad \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathcal{B} = 0 & \operatorname{div} \mathcal{D} = \rho = \text{Ladungsdichte} \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 & \operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = j = \text{Stromdichte} \end{array}$$

**Zeitharmonische Felder:**

$$j = 0, \rho = 0$$

$$(13) \quad \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathcal{B} = 0 & \operatorname{div} \mathcal{D} = \rho = \text{Ladungsdichte} \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 & \operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = j = \text{Stromdichte} \end{array}$$

## Zeitharmonische Felder:

$$j = 0, \rho = 0$$

Ansatz:

$$\mathcal{E}(x, t) = E(x)e^{-i\omega t}, \quad \mathcal{B}(x, t) = B(x)e^{-i\omega t}$$



$$(13) \quad \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathcal{B} = 0 & \operatorname{div} \mathcal{D} = \rho = \text{Ladungsdichte} \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 & \operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = j = \text{Stromdichte} \end{array}$$

## Zeitharmonische Felder:

$$j = 0, \rho = 0$$

Ansatz:

$$\mathcal{E}(x, t) = E(x)e^{-i\omega t}, \quad \mathcal{B}(x, t) = B(x)e^{-i\omega t}$$

Einsetzen in Maxwell führt zu

$$(i) \quad \operatorname{rot} E(x) - i\omega B(x) = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{div} B = 0, \text{ da } \operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$$
$$(ii) \quad \operatorname{rot} \left( \underbrace{\frac{1}{\mu(x)} B(x)}_{=H(x)} \right) + i\omega \underbrace{\epsilon(x) E(x)}_{=D(x)} = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{div} D = 0$$

# Zeitharmonische Felder

$$(i) \quad \operatorname{rot} E(x) - i\omega B(x) = 0$$

$$(ii) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu(x)} B(x) \right) + i\omega \epsilon(x) E(x) = 0$$

# Zeitharmonische Felder

$$(i) \quad \operatorname{rot} E(x) - i\omega B(x) = 0$$

$$(ii) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu(x)} B(x) \right) + i\omega \epsilon(x) E(x) = 0$$

Aus (i) folgt:

$$B = \frac{-i}{\omega} \operatorname{rot} E$$

# Zeitharmonische Felder

$$(i) \quad \operatorname{rot} E(x) - i\omega B(x) = 0$$

$$(ii) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu(x)} B(x) \right) + i\omega \epsilon(x) E(x) = 0$$

Aus (i) folgt:

$$B = \frac{-i}{\omega} \operatorname{rot} E$$

Einsetzen in (ii):

Maxwell Eigenwertproblem:  $(14) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu(x)} \operatorname{rot} E \right) - \omega^2 \epsilon(x) E = 0$

# Zeitharmonische Felder

$$(i) \quad \operatorname{rot} E(x) - i\omega B(x) = 0$$

$$(ii) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu(x)} B(x) \right) + i\omega \epsilon(x) E(x) = 0$$

Aus (i) folgt:

$$B = \frac{-i}{\omega} \operatorname{rot} E$$

Einsetzen in (ii):

Maxwell Eigenwertproblem: (14)  $\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu(x)} \operatorname{rot} E \right) - \omega^2 \epsilon(x) E = 0$

Im Vakuum gilt:  $\mu = \mu_0 = \text{const.}$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 = \text{const.}$ . Benutze außerdem

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} E}_{=0} - \Delta E$$

# Zeitharmonische Felder

$$(i) \quad \operatorname{rot} E(x) - i\omega B(x) = 0$$

$$(ii) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu(x)} B(x) \right) + i\omega \epsilon(x) E(x) = 0$$

Aus (i) folgt:

$$B = \frac{-i}{\omega} \operatorname{rot} E$$

Einsetzen in (ii):

Maxwell Eigenwertproblem: (14)  $\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu(x)} \operatorname{rot} E \right) - \omega^2 \epsilon(x) E = 0$

Im Vakuum gilt:  $\mu = \mu_0 = \text{const.}$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 = \text{const.}$ . Benutze außerdem

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} E}_{=0} - \Delta E$$

Ergibt:

Helmholtz Gleichung (15)  $\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \text{ im } \mathbb{R}^3$

wobei  $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

# Lösungen der Helmholtzgleichung

Helmholtz Gleichung (15)  $\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0$  im  $\mathbb{R}^3$

# Lösungen der Helmholtzgleichung

Helmholtz Gleichung (15)  $\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0$  im  $\mathbb{R}^3$

Ansatz:  $E(x) = e^{ik \cdot x} \eta$  mit  $k, \eta \in \mathbb{R}^3$  fest

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = ik_j e^{ik \cdot x} \eta, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2} = -k_j^2 e^{ik \cdot x} \eta$$



# Lösungen der Helmholtzgleichung

Helmholtz Gleichung

$$(15) \quad \Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \text{ im } \mathbb{R}^3$$

Ansatz:  $E(x) = e^{ik \cdot x} \eta$  mit  $k, \eta \in \mathbb{R}^3$  fest

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = ik_j e^{ik \cdot x} \eta, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2} = -k_j^2 e^{ik \cdot x} \eta$$

Erfüllt die Helmholtz-Gleichung falls

$$-|k|^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad \text{d.h. } |k| = \frac{\omega}{c}$$

# Lösungen der Helmholtzgleichung

Helmholtz Gleichung (15)  $\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0$  im  $\mathbb{R}^3$

Ansatz:  $E(x) = e^{ik \cdot x} \eta$  mit  $k, \eta \in \mathbb{R}^3$  fest

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = ik_j e^{ik \cdot x} \eta, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x_j^2} = -k_j^2 e^{ik \cdot x} \eta$$

Erfüllt die Helmholtz-Gleichung falls

$$-|k|^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad \text{d.h. } |k| = \frac{\omega}{c}$$

Die resultierenden Lösungen (der ursprüngl. Maxwell-Gleichungen)

$$\mathcal{E}(x, t) = e^{i(k \cdot x - \omega t)} \eta, \quad |k| = \frac{\omega}{c}$$

heissen monochromatische, ebene Wellen und beschreiben polarisiertes Licht der Wellenlänge  $\lambda = \frac{c}{\omega}$  und der Frequenz  $\omega$ .

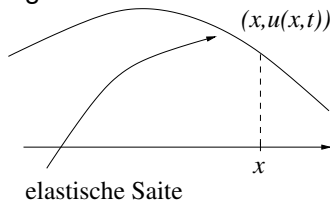
# Weitere Beispiele

## (e) Wellengleichung: am Beispiel der schwingenden Saite

$u(x, t)$  = Auslenkung der Saite

$\rho$  = konstante Massendichte

$\mathbb{R}^2 \ni T(x, t)$  = Spannung der Saite  
 = Vektor, tangential zur Saite



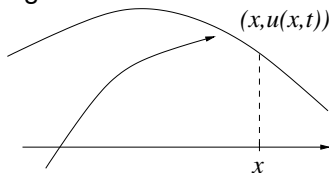
## Weitere Beispiele

### (e) Wellengleichung: am Beispiel der schwingenden Saite

$u(x, t)$  = Auslenkung der Saite

$\rho$  = konstante Massendichte

$\mathbb{R}^2 \ni T(x, t)$  = Spannung der Saite  
 = Vektor, tangential zur Saite



elastische Saite

$$\text{Tangente: } \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x, t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Spannung: } T(x, t) = \frac{\tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x, t) \end{pmatrix}$$

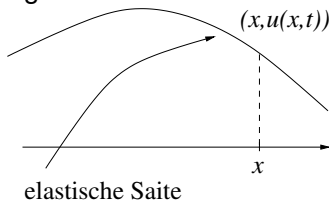
## Weitere Beispiele

### (e) Wellengleichung: am Beispiel der schwingenden Saite

$u(x, t)$  = Auslenkung der Saite

$\rho$  = konstante Massendichte

$\mathbb{R}^2 \ni T(x, t)$  = Spannung der Saite  
= Vektor, tangential zur Saite



$$\text{Tangente: } \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x, t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Spannung: } T(x, t) = \frac{\tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x, t) \end{pmatrix}$$

Idealisierung der elastischen Saite: bei kleinen Auslenkungen

- nur vertikale Bewegung
- keine longitudinale Bewegung

# Die schwingende Saite

$$\text{Spannung: } T(x, t) = \frac{\tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x, t) \end{pmatrix}$$

## Die schwingende Saite

$$\text{Spannung: } T(x, t) = \frac{\tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x, t) \end{pmatrix}$$

Ausgleich der longitudinalen Kräfte: für  $x_1 < x$ :

$$\frac{\tau(\xi, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(\xi, t)}} \Big|_{x_1}^x = 0 \Rightarrow \frac{\tau}{\sqrt{1 + u_x^2}} = \text{const.} = \lambda$$

## Die schwingende Saite

$$\text{Spannung: } T(x, t) = \frac{\tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x, t) \end{pmatrix}$$

Ausgleich der longitudinalen Kräfte: für  $x_1 < x$ :

$$\frac{\tau(\xi, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(\xi, t)}} \Big|_{x_1}^x = 0 \Rightarrow \frac{\tau}{\sqrt{1 + u_x^2}} = \text{const.} = \lambda$$

Newtonsches Kraftgesetz  $F = ma$  für vertikale Bewegung:

$$\frac{\tau(\xi, t)u_x(\xi, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(\xi, t)}} \Big|_{x_1}^x = \int_{x_1}^x \rho u_{tt}(\xi, t) d\xi$$

d.h.

$$\lambda(u_x(x, t) - u_x(x_1, t)) = \int_{x_1}^x \rho u_{tt}(\xi, t) d\xi$$



# Die schwingende Saite

$$\text{Spannung: } T(x, t) = \frac{\tau(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x, t) \end{pmatrix}$$

Ausgleich der longitudinalen Kräfte: für  $x_1 < x$ :

$$\frac{\tau(\xi, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(\xi, t)}} \Big|_{x_1}^x = 0 \Rightarrow \frac{\tau}{\sqrt{1 + u_x^2}} = \text{const.} = \lambda$$

Newtonsches Kraftgesetz  $F = ma$  für vertikale Bewegung:

$$\frac{\tau(\xi, t) u_x(\xi, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(\xi, t)}} \Big|_{x_1}^x = \int_{x_1}^x \rho u_{tt}(\xi, t) d\xi$$

d.h.

$$\lambda(u_x(x, t) - u_x(x_1, t)) = \int_{x_1}^x \rho u_{tt}(\xi, t) d\xi$$

Differentiation nach  $x$ :

1-d Wellengleichung:

$$(16) \quad u_{xx}(x, t) = \frac{\rho}{\lambda} u_{tt}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

# Die schwingende Saite

1-d Wellengleichung: 
$$(16) \quad u_{xx}(x, t) = \frac{\rho}{\lambda} u_{tt}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

Spezielle Lösung z.B.:  $u(x, t) = \sin(x - ct)$  mit  $c^2 = \frac{\lambda}{\rho}$ .

# Die schwingende Saite

1-d Wellengleichung: (16) 
$$u_{xx}(x, t) = \frac{\rho}{\lambda} u_{tt}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

Spezielle Lösung z.B.:  $u(x, t) = \sin(x - ct)$  mit  $c^2 = \frac{\lambda}{\rho}$ .

2-d Wellengleichung:

$$(17) \quad u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) = \frac{\rho}{\lambda} u_{tt}(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$$

# Die schwingende Saite

1-d Wellengleichung: (16)  $u_{xx}(x, t) = \frac{\rho}{\lambda} u_{tt}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$

Spezielle Lösung z.B.:  $u(x, t) = \sin(x - ct)$  mit  $c^2 = \frac{\lambda}{\rho}$ .

2-d Wellengleichung:

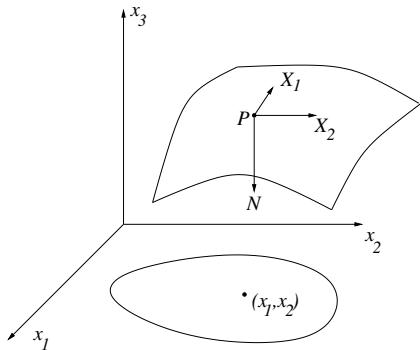
(17)  $u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) = \frac{\rho}{\lambda} u_{tt}(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$

$n$ -dimensionale Wellengleichung: (18)  $\Delta u = \frac{\rho}{\lambda} u_{tt}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

# Weitere Beispiele

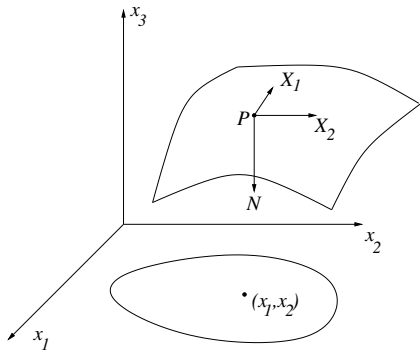
## (f) Krümmung von Funktionsgraphen

$u(x_1, x_2) =$  Höhe der Fläche über  
der  $x_1, x_2$ -Ebene



# Weitere Beispiele

## (f) Krümmung von Funktionsgraphen



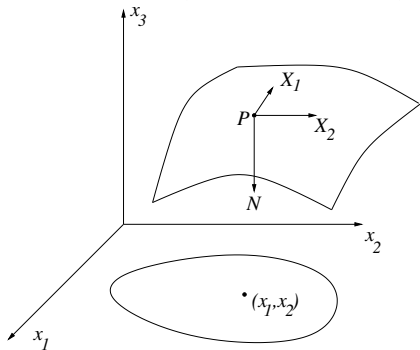
$u(x_1, x_2) =$  Höhe der Fläche über  
der  $x_1, x_2$ -Ebene

$$P = (x_1, x_2, u(x_1, x_2))$$

Beschreibung als Funktionsgraph

# Weitere Beispiele

## (f) Krümmung von Funktionsgraphen



$u(x_1, x_2)$  = Höhe der Fläche über der  $x_1, x_2$ -Ebene

$$P = (x_1, x_2, u(x_1, x_2))$$

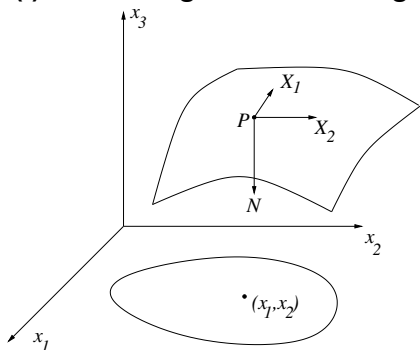
Beschreibung als Funktionsgraph

Die Tangentialebene in  $P$  wird aufgespannt von zwei Vektoren

$$X_1 = (1, 0, u_{x_1})^T, \quad X_2 = (0, 1, u_{x_2})^T$$

# Weitere Beispiele

## (f) Krümmung von Funktionsgraphen



Dabei

$$X_1 = \frac{d}{dx_1} (x_1, x_2, u(x_1, x_2))^T, \quad X_2 = \frac{d}{dx_2} (x_1, x_2, u(x_1, x_2))^T$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} (u_{x_1}, u_{x_2}, -1)^T$$

$u(x_1, x_2) =$  Höhe der Fläche über der  $x_1, x_2$ -Ebene

$$P = (x_1, x_2, u(x_1, x_2))$$

Beschreibung als Funktionsgraph

Die Tangentialebene in  $P$  wird aufgespannt von zwei Vektoren

$$X_1 = (1, 0, u_{x_1})^T, \quad X_2 = (0, 1, u_{x_2})^T$$



# Krümmung von Funktionsgraphen

$$X_1 = (1, 0, u_{x_1})^T, \quad X_2 = (0, 1, u_{x_2})^T, \quad N = \frac{1}{\sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} (u_{x_1}, u_{x_2}, -1)^T$$

# Krümmung von Funktionsgraphen

$$X_1 = (1, 0, u_{x_1})^T, \quad X_2 = (0, 1, u_{x_2})^T, \quad N = \frac{1}{\sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} (u_{x_1}, u_{x_2}, -1)^T$$

Offenbar gilt

$$|N|^2 = 1 \quad \text{und} \quad N \cdot X_1 = N \cdot X_2 = 0$$

# Krümmung von Funktionsgraphen

$$X_1 = (1, 0, u_{x_1})^T, \quad X_2 = (0, 1, u_{x_2})^T, \quad N = \frac{1}{\sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} (u_{x_1}, u_{x_2}, -1)^T$$

Offenbar gilt

$$|N|^2 = 1 \quad \text{und} \quad N \cdot X_1 = N \cdot X_2 = 0$$

## Krümmung

*Die Krümmung der Fläche wird gemessen durch die Veränderung der Normalen.*

# Krümmung von Funktionsgraphen

$$X_1 = (1, 0, u_{x_1})^T, \quad X_2 = (0, 1, u_{x_2})^T, \quad N = \frac{1}{\sqrt{1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} (u_{x_1}, u_{x_2}, -1)^T$$

Offenbar gilt

$$|N|^2 = 1 \quad \text{und} \quad N \cdot X_1 = N \cdot X_2 = 0$$

## Krümmung

*Die Krümmung der Fläche wird gemessen durch die Veränderung der Normalen.*

$$N_{x_1} := \frac{\partial N}{\partial x_1}, \quad N_{x_2} := \frac{\partial N}{\partial x_2}$$

Diese beiden Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  lassen sich durch die Basis  $X_1, X_2, N$  im Punkt  $P$  darstellen:

$$N_{x_1} = \alpha X_1 + \beta X_2 + \lambda N$$

$$N_{x_2} = \gamma X_1 + \delta X_2 + \mu N$$

# Krümmung von Funktionsgraphen

$$(*) \quad \begin{cases} N_{x_1} &= \alpha X_1 + \beta X_2 + \lambda N \\ N_{x_2} &= \gamma X_1 + \delta X_2 + \mu N \end{cases}$$

Bestimme  $\lambda, \mu$  durch Skalar-Multiplikation mit  $N$ .

# Krümmung von Funktionsgraphen

$$(*) \quad \begin{cases} N_{x_1} &= \alpha X_1 + \beta X_2 + \lambda N \\ N_{x_2} &= \gamma X_1 + \delta X_2 + \mu N \end{cases}$$

Bestimme  $\lambda, \mu$  durch Skalar-Multiplikation mit  $N$ . Beachte

$$N_{x_1} \cdot N = N_{x_2} \cdot N = 0 \text{ folgt aus Differentiation von } N \cdot N = 1$$

$$\text{d.h. } \lambda = \mu = 0$$

# Krümmung von Funktionsgraphen

$$(*) \quad \begin{cases} N_{x_1} &= \alpha X_1 + \beta X_2 + \lambda N \\ N_{x_2} &= \gamma X_1 + \delta X_2 + \mu N \end{cases}$$

Bestimme  $\lambda, \mu$  durch Skalar-Multiplikation mit  $N$ . Beachte

$$N_{x_1} \cdot N = N_{x_2} \cdot N = 0 \text{ folgt aus Differentiation von } N \cdot N = 1$$

d.h.  $\lambda = \mu = 0$

Bestimmung von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ : Für  $i, j = 1, 2$

$$g_{ij} := X_i \cdot X_j, \quad h_{ij} := N \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial N}{\partial x_j} \cdot X_i$$

letzteres folgt aus Differentiation von  $N \cdot X_i = 0$  nach  $x_j$ .

# Krümmung von Funktionsgraphen

$$(*) \quad \begin{cases} N_{x_1} &= \alpha X_1 + \beta X_2 + \lambda N \\ N_{x_2} &= \gamma X_1 + \delta X_2 + \mu N \end{cases}$$

Bestimme  $\lambda, \mu$  durch Skalar-Multiplikation mit  $N$ . Beachte

$$N_{x_1} \cdot N = N_{x_2} \cdot N = 0 \text{ folgt aus Differentiation von } N \cdot N = 1$$

d.h.  $\lambda = \mu = 0$

Bestimmung von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ : Für  $i, j = 1, 2$

$$g_{ij} := X_i \cdot X_j, \quad h_{ij} := N \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial N}{\partial x_j} \cdot X_i$$

letzteres folgt aus Differentiation von  $N \cdot X_i = 0$  nach  $x_j$ .

Auflösen des LGS (\*):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = -(g_{ij})_{i,j=1,2}^{-1} (h_{ij})_{i,j=1,2}$$



# Krümmung von Funktionsgraphen

Auflösen des LGS (\*):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &= -(\mathbf{g}_{ij})_{i,j=1,2}^{-1} (\mathbf{h}_{ij})_{i,j=1,2} \\
 &= \begin{pmatrix} |X_1|^2 & X_1 \cdot X_2 \\ X_1 \cdot X_2 & |X_2|^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{X_1} \cdot X_1 & N_{X_2} \cdot X_1 \\ N_{X_1} \cdot X_2 & N_{X_2} \cdot X_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

# Krümmung von Funktionsgraphen

Auflösen des LGS (\*):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = -(\mathbf{g}_{ij})_{i,j=1,2}^{-1} (\mathbf{h}_{ij})_{i,j=1,2}$$

$$= \begin{pmatrix} |X_1|^2 & X_1 \cdot X_2 \\ X_1 \cdot X_2 & |X_2|^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{X_1} \cdot X_1 & N_{X_2} \cdot X_1 \\ N_{X_1} \cdot X_2 & N_{X_2} \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$ spur bzw. Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

nennet man **mittlere Krümmung**  $H$  bzw. **Gaußsche Krümmung**  $K$  der Fläche im Punkt  $P = (x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ .

# Krümmung von Funktionsgraphen

Einsetzen der Ausdrücke für  $X_1, X_2, N_{X_1}, N_{X_2}$  in

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |X_1|^2 & X_1 \cdot X_2 \\ X_1 \cdot X_2 & |X_2|^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{X_1} \cdot X_1 & N_{X_2} \cdot X_1 \\ N_{X_1} \cdot X_2 & N_{X_2} \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

liefert

# Krümmung von Funktionsgraphen

Einsetzen der Ausdrücke für  $X_1, X_2, N_{X_1}, N_{X_2}$  in

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |X_1|^2 & X_1 \cdot X_2 \\ X_1 \cdot X_2 & |X_2|^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{X_1} \cdot X_1 & N_{X_2} \cdot X_1 \\ N_{X_1} \cdot X_2 & N_{X_2} \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

liefert

$$H = \frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{1}{2} \frac{(1 + u_{X_1}^2)u_{X_2 X_2} + (1 + u_{X_2}^2)u_{X_1 X_1} - 2u_{X_1} u_{X_2} u_{X_1 X_2}}{(1 + u_{X_1}^2 + u_{X_2}^2)^{3/2}}$$

# Krümmung von Funktionsgraphen

Einsetzen der Ausdrücke für  $X_1, X_2, N_{x_1}, N_{x_2}$  in

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |X_1|^2 & X_1 \cdot X_2 \\ X_1 \cdot X_2 & |X_2|^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{x_1} \cdot X_1 & N_{x_2} \cdot X_1 \\ N_{x_1} \cdot X_2 & N_{x_2} \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

liefert

$$\begin{aligned} H &= \frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{1}{2} \frac{(1 + u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} + (1 + u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2}}{(1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \quad \text{Rechnung!} \end{aligned}$$

# Krümmung von Funktionsgraphen

Einsetzen der Ausdrücke für  $X_1, X_2, N_{x_1}, N_{x_2}$  in

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |X_1|^2 & X_1 \cdot X_2 \\ X_1 \cdot X_2 & |X_2|^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{x_1} \cdot X_1 & N_{x_2} \cdot X_1 \\ N_{x_1} \cdot X_2 & N_{x_2} \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

liefert

$$H = \frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{1}{2} \frac{(1 + u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} + (1 + u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2}}{(1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \quad \text{Rechnung!}$$

$$K = \alpha\delta - \beta\gamma = \frac{u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - (u_{x_1x_2})^2}{(1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)^2}$$

# Krümmung von Funktionsgraphen

Einsetzen der Ausdrücke für  $X_1, X_2, N_{x_1}, N_{x_2}$  in

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |X_1|^2 & X_1 \cdot X_2 \\ X_1 \cdot X_2 & |X_2|^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{x_1} \cdot X_1 & N_{x_2} \cdot X_1 \\ N_{x_1} \cdot X_2 & N_{x_2} \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

liefert

$$H = \frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{1}{2} \frac{(1 + u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} + (1 + u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2}}{(1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \quad \text{Rechnung!}$$

$$K = \alpha\delta - \beta\gamma = \frac{u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - (u_{x_1x_2})^2}{(1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)^2}$$

$$= \det \left( \frac{D^2 u}{1 + |\nabla u|^2} \right)$$

# Krümmung von Funktionsgraphen

Nun stellt man sich folgendes Problem: wie sieht eine Fläche aus, deren mittlere Krümmung/Gaußsche Krümmung vorgegeben ist?



# Krümmung von Funktionsgraphen

Nun stellt man sich folgendes Problem: wie sieht eine Fläche aus, deren mittlere Krümmung/Gaußsche Krümmung vorgegeben ist?

Z.B. bei konstanter mittlere Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung sucht man Lösungen der folgenden partiellen DGlen:

# Krümmung von Funktionsgraphen

Nun stellt man sich folgendes Problem: wie sieht eine Fläche aus, deren mittlere Krümmung/Gaußsche Krümmung vorgegeben ist?

Z.B. bei konstanter mittlere Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung sucht man Lösungen der folgenden partiellen DGlen:

konstante mittlere Krümmung:

$$(19) \quad \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = H = \text{const.}$$

# Krümmung von Funktionsgraphen

Nun stellt man sich folgendes Problem: wie sieht eine Fläche aus, deren mittlere Krümmung/Gaußsche Krümmung vorgegeben ist?

Z.B. bei konstanter mittlere Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung sucht man Lösungen der folgenden partiellen DGLen:

konstante mittlere Krümmung:

$$(19) \quad \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = H = \text{const.}$$

konstante Gaußsche Krümmung:

$$(20) \quad \det \left( \frac{D^2 u}{1 + |\nabla u|^2} \right) = K = \text{const.}$$