Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Nichtlineare Randwertprobleme – Wintersemester 2015/2016
Handout/Erinnerung Maximumprimzipien

Ref.: Vorlesung Rand- und Eigenwertprobleme SoSe 2016, Abschnitt 3.2 (Maximumprinzip) und Abschnitt 3.5 (starkes Maximumprinzip).

Satz 1 (Schwaches Maximumprinzip) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$. Falls $w \in W^{1,2}(\Omega)$ im schwachen Sinn die Ungleichung*

$$-\Delta w + c(x)w \leq 0 \text{ in } \Omega$$

erfüllt, so gilt

$$\sup_\Omega w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+.$$

Insbesondere: ist $w \leq 0$ auf $\partial\Omega$ so ist $w \leq 0$ in Ω.

Satz 2 (Starkes Maximumprinzip) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (offen und zusammenhängend) und $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$. Falls $w \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, $w \leq 0$ in Ω im schwachen Sinn die Ungleichung*

$$-\Delta w + c(x)w \leq 0 \text{ in } \Omega$$

erfüllt, so gilt: existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $w(x_0) = \sup_\Omega w$ so folgt $w \equiv w(x_0)$ in Ω.

Satz 3 (Lemma von Hopf) *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel, $c \in L^\infty(B)$, $c \geq 0$ sowie $p \in \partial B$. Falls $w \in W^{1,2}(B) \cap C(\overline{B})$ im schwachen Sinn die Ungleichung*

$$-\Delta w + c(x)w \leq 0 \text{ in } \Omega$$

erfüllt sowie $w(p) = \sup_B w \geq 0$, so gilt entweder $w \equiv w(p)$ in B oder

$$\liminf_{t \to 0+} \frac{w(p) - w(p - tm)}{t} > 0$$

für jeden Vektor $m \in \mathbb{R}^n$ mit $m \cdot \nu(p) > 0$, wobei $\nu(p)$ die äussere Normale an ∂B im Punkt p ist.