Karlsruher Institut für Technologie WS 2012/2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Partielle Differentialgleichungen
4. Übungsblatt

Aufgabe 12

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für die dreidimensionale homogene Wellengleichung:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_3^2 & \text{für} \quad x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Aufgabe 13

Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung der dreidimensionalen homogenen Wellengleichung und es gelte $U(0) < \infty$, wobei

$$U(t) = \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\mathbb{R}^3} |D^\alpha u(x,t)|\, dx.$$

a) Zeigen Sie, dass eine von u unabhängige Konstante $K > 0$ existiert, so dass $|u(x,t)| \leq \frac{K}{t} U(0)$ für alle $t \geq 1$ gilt.

   Hinweis: Schreiben Sie die Lösung als Integral $\int_S f \cdot \nu \, d\sigma$ mit einer geeigneten Funktion f und wenden Sie den Satz von Gauß an.

b) Wenden Sie das Resultat aus a) auf die Funktion $v(x,t) = u(x,T-t)$ an ($T > 0$ genügend groß), und zeigen Sie:

$$\text{Gilt} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = 0, \quad \text{so folgt} \quad u \equiv 0.$$

Hinweis zur Notation: Einen Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ nennen wir auch Multiindex. Es ist $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und für eine Funktion $v \in C^m(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$ definieren wir

$$D^\alpha v(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \qquad (x \in \Omega).$$

Im obigen Fall gelte $\alpha \in \mathbb{N}_0^4$ und $D^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \partial t^{\alpha_4}}(x,t)$, $(x \in \mathbb{R}^3,\ t \in [0,\infty))$.

Aufgabe 14

Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, $n \leq 3$, eine Lösung der homogenen Wellengleichung. Es gelte $u(x,0) = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| > R$ ($R > 0$ fest).
Zeigen Sie, dass das Energieintegral

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \, dx$$

zeitlich konstant ist.

Besprechung in der Übung am 14.11.2012.