Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
8. Übungsblatt

Aufgabe 28

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $k \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$. Zeigen Sie, dass der Operator

$$K : \big(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty\big)\,, \quad u \mapsto (Ku)(x) := \int_\Omega k(x,y)u(y)\,dy$$

kompakt ist.

Aufgabe 29

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum sowie $S, T : H \to H$ lineare Operatoren. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist S beschränkt und T kompakt, so sind $S \circ T$ und $T \circ S$ kompakt.

b) Ist T kompakt, so ist auch T^2 kompakt.

c) Ist T^2 kompakt, so ist auch T kompakt.

d) Gilt $\dim(\mathrm{Bild}(T)) < \infty$, so ist T kompakt.

e) Gilt $\dim(\mathrm{Bild}(T)) < \infty$ und ist T beschränkt, so ist T kompakt.

Aufgabe 30

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Betrachten Sie das folgende Problem: Gegeben $f \in L^2(\Omega)$, finde $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit

$$(*) \qquad B[u,\varphi] = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega),$$

wobei $B[u,\varphi]$ die aus der Vorlesung bekannte Bilinearform mit Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ $(i,j = 1,\dots,n)$ ist.

a) Zeigen Sie, dass $(*)$ als schwache Formulierung des Neumann-Problems

$$\begin{cases} Lu = -\sum\limits_{i,j=1}^n \partial_i\left(a_{ij}(x)\partial_j u\right) + \sum\limits_{i=1}^n b_i(x)\partial_i u + c(x)u = f & \text{in } \Omega \\ (\nabla u)^T A(x)\nu(x) = \sum\limits_{i,j=1}^n \partial_j u\, a_{ij}(x)\nu_i(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

aufgefasst werden kann.

Bitte wenden!

b) Es sei L gleichmäßig elliptisch in Ω. Zeigen Sie: Es existiert ein $\mu_0 \geq 0$, so dass für alle $\mu \geq \mu_0$ genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ des Problems

$$\begin{cases} Lu + \mu u &= f \quad \text{in } \Omega \\ (\nabla u)^T A(x)\nu(x) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

existiert.

Besprechung in der Übung am 8.6.2011