Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
9. Übungsblatt

Aufgabe 31

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und $F \in (L^2(\Omega))^n$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u &= \operatorname{div} F + f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Die schwache Formulierung des Problems ist gegeben durch: Finde $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega -F \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Aufgabe 32

Es sei $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ eine schwache Lösung von

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \quad \text{in } (0,1) \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

wobei $b, c \in L^\infty(0,1)$ und $f \in L^2(0,1)$. Zeigen Sie, dass $u \in W^{2,2}(0,1)$ gilt und dass u die Gleichung $-u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$ punktweise fast überall in $(0,1)$ erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Existiert ein $C > 0$, so dass

$$\left| \int_0^1 u' \varphi' \, dx \right| \leq C \|\varphi\|_2 \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(0,1)$$

so gilt $u \in W^{2,2}(0,1)$.

Aufgabe 33

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Beweisen Sie:

(i) Ist $\Omega' \subset \Omega$ offen mit $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) > 0$, so gilt: $u_\alpha \to u$ $(\alpha \to 0)$ in $W^{1,2}(\Omega')$.

(ii) Ist $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = 0$, so gilt $u \equiv \text{const.}$ fast überall in Ω.

Bitte wenden!

Aufgabe 34

Es sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Betrachten Sie für $f \in L^2(\Omega)$ das Neumann Randwertproblem

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(*)$ genau dann eine schwache Lösung besitzt, wenn $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$ gilt.
Hinweis: Finden Sie wie im Fall des Dirichlet Randwertproblems einen kompakten Operator $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, so dass $(*)$ äquivalent zum Problem $(\mathrm{Id} - K)u = Kf$ ist.
Sie können dabei ohne Beweis verwenden, dass die Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt ist.

Besprechung in der Übung am 15.6.2011