Institut für Analysis
Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)

Prof.Dr. Wolfgang Reichel

Rand- und Eigenwertprobleme – Sommersemester 2011
Handout über den Gaußschen Integralsatz

Definition G.1 *Eine offene, zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt C^1-Gebiet (Lipschitz-Gebiet), falls für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ ein Radius $r > 0$ und eine C^1-Funktion (Lipschitz-Funktion) $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ existiert, so daß (nach einer geeigneten Bewegung des Koordinatensystems) gilt:*

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x = (x', x_n) \in B_r(x_0) : x_n > \phi(x')\}.$$

Es gilt dann notwendigerweise

$$\partial\Omega \cap B_r(x_0) = \{x = (x', x_n) \in B_r(x_0) : x_n = \phi(x')\}.$$

Für $x = (x', \phi(x')) \in \partial\Omega \cap B_r(x_0)$ heißt der Vektor

$$\nu(x) = \frac{(\nabla\phi(x'), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\phi(x')|^2}}$$

äußerer Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$ im Punkt x. Im Fall eines Lipschitz-Gebietes existiert der äußere Einheitsnormalenvektor ν f.ü. bzgl. des Oberflächenmaßes auf $\partial\Omega$.

Satz G.2 (Gaußscher Integralsatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und sei ν der Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$. Dann gilt*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \oint_{\partial\Omega} f \nu_i \, do$$

für jede Funktion $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Das Resultat gilt auch, falls Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist.

Oft erscheint der Gaußsche Integralsatz in folgender Form:

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \oint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, do,$$

wobei $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld ist. Die Komponentenfunktionen von $F = (F_1, \ldots, F_n)$ sollen dann $F_i \in C^1(\overline{\Omega})$ für $i = 1, \ldots, n$ erfüllen.

Lemma G.3 (Greensche Identitäten) *Seien $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u \, dx &= \oint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu \, do, \\
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= -\int_\Omega u \Delta v \, dx + \oint_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \nu \, do, \\
\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, dx &= \oint_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \nu \, do.
\end{aligned}$$