Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Rand- und Eigenwertprobleme – Sommersemester 2011
Handout zu Neumannschen Randbedingungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz Gebiet und

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i + c(x)$$

ein gleichmäßig elliptischer Operator in Divergenzform mit beschränkten Koeffizienten. Für $f \in L^2(\Omega)$ lautet das Neumannsche Randwertproblem

$$Lu = f \text{ in } \Omega, \qquad \nu^T A(x)\nabla u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

in schwacher Formulierung: Finde $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit

$$B(u,\phi) = \int_\Omega f\phi\,dx \text{ für alle } \phi \in W^{1,2}(\Omega)$$

wobei $B : W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ folgende Bilinearform ist:

$$B(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u\, v + c(x)uv\,dx.$$

Theorem N.1 (Erster Existenzsatz) *Es gibt einen Wert $\mu_0 \geq 0$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $\mu \geq \mu_0$ und für alle $f \in L^2(\Omega)$ gibt es genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ des Neumannschen Randwertproblems*

$$Lu + \mu u = f \text{ in } \Omega, \qquad \nu^T A(x)\nabla u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Der lineare Operator

$$K : \begin{cases} L^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega), \\ f & \mapsto & u, \end{cases}$$

der die rechte Seite f auf die Lösung u abbildet, ist kompakt.

Theorem N.2 (Fredholm Alternative) *Entweder*

(I) hat das Randwertproblem

$$(*) \qquad Lu = f \text{ in } \Omega, \qquad \nu^T A(x)\nabla u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$

oder

(II) es gibt eine nichttriviale Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von

$$Lu = 0 \text{ in } \Omega, \qquad \nu^T A(x)\nabla u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Im Fall (II) gilt zusätzlich

$$(*) \text{ ist lösbar } \Leftrightarrow \langle f, v\rangle_{L^2} = 0 \text{ für jede Lösung } v \in W^{1,2}(\Omega)$$

des adjungierten (homogenen) Randwertproblems

$$L^* v = 0 \text{ in } \Omega, \qquad \nu^T A(x)\nabla v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Definition N.3 (Neumann-Eigenwerte) *μ heißt Neumann-Eigenwert falls eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ von*

$$(*) \qquad Lu = \mu u \text{ in } \Omega, \qquad \nu^T A(x)\nabla u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

existiert. u heißt Neumann-Eigenfunktion von L zum Eigenwert μ.

Theorem N.4 (Eigenwerte symmetrischer Operatoren) *Ist $L = L^*$ und $c(x) \geq 0$ dann besitzt L unendlich viele Eigenwerte $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (jeder Eigenwert wird gemäß seiner Vielfachheit wiederholt) mit*

$$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots, \qquad \mu_k \to \infty \text{ für } k \to \infty$$

und es gibt eine Orthonormalbasis $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega)$ bestehend aus Eigenfunktionen zu den Eigenwerten μ_k.

Beispiel: $n = 2$, $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, $L = -\Delta$. Betrachte das Eigenwertproblem

$$-\Delta\psi = \mu\psi \text{ in } \Omega, \quad \nabla\psi \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Der Separationsansatz $\psi(x, y) = u(x)v(y)$ führt auf

$$-u'' = \alpha u \text{ in } (0, a), \quad u'(0) = u'(a) = 0$$

sowie

$$-v'' = \beta v \text{ in } (0, b), \quad v'(0) = v'(b) = 0$$

mit $\mu = \alpha + \beta$. Daraus ergibt sich (wie im Dirichlet-Fall) eine ONB aus Eigenfunktionen

$$\psi_{kl}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{l\pi}{b}y\right), \qquad k, l \in \mathbb{N}_0$$

mit Neumann-Eigenwerten

$$\mu_{kl} = \frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{l^2\pi^2}{b^2}, \qquad k, l \in \mathbb{N}_0.$$

(Zum Vergleich: die Dirichlet-Eigenwerte sind $\lambda_{kl} = \frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{l^2\pi^2}{b^2}, \qquad k, l \in \mathbb{N}$)

Im Folgenden nehmen wir an, dass L symmetrisch ist ($L = L^*$) und dass $c(x) \geq 0$ ist.

Theorem N.5 (Variationelle Charakterisierung der Eigenwerte) *Es gelten folgende Charakterisierungen*

(a)

$$\mu_1 = \min\{B[u,u], u \in W^{1,2}(\Omega), \|u\|_{L^2} = 1\}.$$

(b) $i \geq 2$

$$\mu_i = \min\{B[u,u], u \in W^{1,2}(\Omega), \|u\|_{L^2} = 1, \int_\Omega u\psi_k \, dx = 0, k = 1, \ldots, i-1\}.$$

Theorem N.6 (Minmax Prinzip) *Sei* $i \geq 1$ *und* $W \subset W^{1,2}(\Omega)$ *ein Unterraum mit* $\dim W = i$ *sowie*

$$\mu_i^*(W) = \max\{B[u,u], u \in W, \|u\|_{L^2} = 1\}.$$

Dann gilt

$$\mu_i = \min_{\dim W = i} \mu_i^*(W),$$

wobei das Minimum über alle i*-dimensionalen Unterräume* W *von* $W^{1,2}(\Omega)$ *gebildet wird.*

Theorem N.7 (Maxmin Prinzip) *Sei* $i \geq 2$ *und* $W \subset W^{1,2}(\Omega)$ *ein Unterraum mit* $\dim W = i-1$ *sowie*

$$\mu_{i,*}(W) = \min\{B[u,u], u \perp_{L^2} W, \|u\|_{L^2} = 1\}.$$

Dann gilt

$$\mu_i = \max_{\dim W = i-1} \mu_{i,*}(W),$$

wobei das Maximum über alle $i-1$*-dimensionalen Unterräume* W *von* $W^{1,2}(\Omega)$ *gebildet wird.*