

Folgen

Unter einer Folge (X_n) versteht man die Gesamtheit der reellen Zahlen X_0, X_1, X_2, \dots . Beispiele hierfür sind explizit definierte Folgen wie zum Beispiel

$$\begin{aligned} \text{i) } X_n &= \frac{1}{n+1}, & \text{also } X_0 &= 1, X_1 = \frac{1}{2}, X_2 = \frac{1}{3} \text{ usw.} \\ \text{ii) } X_n &= n^2 - 1, & \text{also } X_0 &= -1, X_1 = 0, X_2 = 3 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Man kann Folgen jedoch auch *rekursiv* definieren durch eine Vorschrift $X_{n+1} = f(X_n)$, wenn man den Startwert X_0 vorgibt. Zum Beispiel:

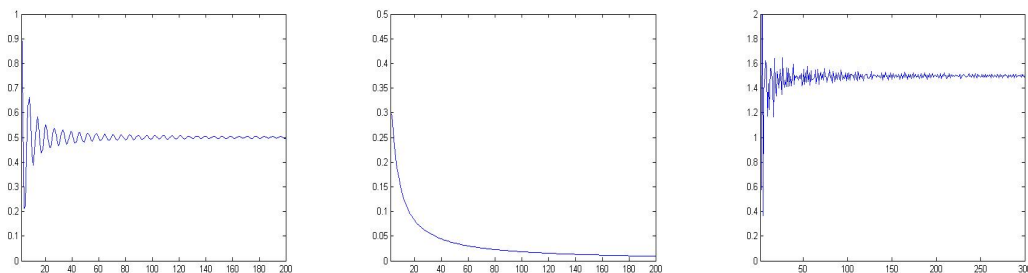
$$\begin{aligned} \text{i) } X_{n+1} &= 2X_n^2 + 1, & X_0 &= 2, \\ & \text{also } X_0 &= 2, X_1 = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9, X_2 = 2 \cdot 9^2 + 1 = 163 \text{ usw.} \\ \text{ii) } X_{n+1} &= X_n + 2n - 1, & X_0 &= -1, \\ & \text{also } X_0 &= -1, X_1 = -1 + 2 \cdot 1 - 1 = 0, X_2 = 0 + 2 \cdot 2 - 1 = 3 \text{ usw.} \end{aligned}$$

In der Tat kann man induktiv beweisen, dass beide unter ii) genannten Folgen identisch sind, d.h. eine rekursive Folge kann eine explizite Darstellung haben und eine explizite Darstellung eine rekursive. Es handelt sich in jedem Fall um *dasselbe mathematische Objekt*, es ist lediglich unterschiedlich dargestellt.

Grenzwerte:

Folgen (X_n) können konvergieren oder nicht. Die genaue Definition eines Grenzwertes ist ziemlich kompliziert, aber wir können an den folgenden Beispielen "sehen", ob die entsprechende zugrunde liegende Folge konvergent ist.

Abbildung 1: Darstellung konvergenter Folgen in kontinuierlicher Form



Die *möglichen* Grenzwerte X_∞ von rekursiven Folgen $X_{t+1} = f(X_t)$ werden über die Grenzwertgleichung bestimmt:

$$X_\infty = f(X_\infty)$$

Häufungswerte:

Wie der Name schon sagt, häufen sich die Folgenglieder X_t bei einem Häufungswert. Die durch

$$X_n = (-1)^n$$

definierte Folge konvergiert offensichtlich nicht, aber alle geraden Folgenglieder sind identisch 1, d.h. $X_{2n} = 1$, und es gilt $X_{2n+1} = -1$. Die Werte -1 und 1 nennen wir dann Häufungswerte.

Divergente Folgen:

Beispiele divergenter, also nicht konvergenter Folgen:

Abbildung 2: Darstellung divergenter Folgen in kontinuierlicher Form

