Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist eine Beweismethode, um eine für alle natürliche Zahlen formulierte Aussage zu beweisen. Zum Beispiel:

- $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$, d.h. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $3^{2n+4}-2^{n-1}$ durch 7 teibar.

Um den Beweis zu erbringen, geht man folgendermaßen vor:

1. **Induktionsanfang:** Man zeigt die Behauptung für $n=1$.
2. **Induktionsschritt:** Man nimmt an, die Aussage sei für ein gewisses nichtpräzisiertes $n \in \mathbb{N}$ wahr und zeigt davon ausgehend die Aussage für $n+1$.

Sind beide Schritte erfolgreich durchgeführt, so ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Beispiel 1: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$

Induktionsanfang: Für $n=1$ beträgt die linke Seite $2\cdot 1-1=1$ ebenso wie die rechte Seite. Damit stimmt die Aussage für $n=1$ und der Induktionsanfang ist erledigt.

Induktionsschritt: Es gelte die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gelte $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$. Zu zeigen ist die Aussage für $n+1$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=(n+1)^2$$

Wir verifizieren:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)+\big(2(n+1)-1\big)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Folglich stimmt die Aussage für $n+1$.

Der Induktionsbeweis ist damit durchgeführt, d.h. wir haben bewiesen, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 2: $3^{2n+4} - 2^{n-1}$ ist durch 7 teibar

Induktionsanfang: Es gilt $3^{2\cdot 1+4} - 2^{1-1} = 728 = 7 \cdot 104$, d.h. die Behauptung für $n = 1$ stimmt.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, also $3^{2n+4} - 2^{n-1} = 7m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+4} - 2^{(n+1)-1} &= 3^{2n+4} \cdot 9 - 2^n \\ &= (7m + 2^{n-1}) \cdot 9 - 2^n \\ &= 7 \cdot 9m + 9 \cdot 2^{n-1} - 2^n \\ &= 7 \cdot 9m + (9-2) \cdot 2^{n-1} \\ &= 7 \cdot (9m + 2^{n-1}) \end{aligned}$$

Da $9m + 2^{n-1}$ eine natürliche Zahl ist, ist $3^{2(n+1)+4} - 2^{(n+1)-1}$ durch 7 teilbar und der Induktionsschritt ist vollzogen.

Beispiel 3: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ beträgt die linke Seite $\frac{1}{(3-2)(3+1)} = \frac{1}{4}$ ebenso wie die rechte Seite, d.h. die Behauptung stimmt für $n = 1$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3(i-1)+1)(3i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3(i-1)+1)(3i+1)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\ &= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\ &= \frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} \\ &= \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} \\ &= \frac{n+1}{3n+4} \\ &= \frac{n+1}{3(n+1)+1} \end{aligned}$$