Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ wurden bereits im 16. Jahrhundert von Mathematikern zur Lösung polynomieller Gleichungen verwendet. i ist – vage formuliert – "etwas, was im Quadrat -1 ergibt". Aus mathematischer Sicht ist dies allerdings zu unpräzise, sodass die tatsächliche Definition hier nicht verheimlicht werden soll.

Definition. Eine komplexe Zahl z ist ein Paar (a, b) reeller Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, wir schreiben $z = a+ib$ und bezeichnen mit $\mathfrak{Re}(z) = a$ den *Realteil* und mit $\mathfrak{Re}(z) = b$ den *Imaginärteil* von z. Die Menge der komplexen Zahlen kürzt man mit dem Symbol $\mathbb{C}$ ab.

Die komplexe Zahl i ist also in Wirklichkeit das Zahlenpaar $(0, 1)$ und wir müssen Addition und Multiplikation so definieren, dass tatsächlich $i^2 = -1$ sowie die übrigen Rechengesetze gelten. Dies wird gewährleistet durch:

$$\begin{aligned} \textbf{Addition:} \quad & (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ \textbf{Multiplikation:} \quad & (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \end{aligned}$$

Die Beziehung $i^2 = -1$ ergibt sich dann formal aus

$$i^2 = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$$

Dies erzwingt eine konkrete Definition der Subtraktion und der Division

$$\begin{aligned} \textbf{Subtraktion:} \quad & (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) := (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \\ \textbf{Division:} \quad & \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} := \frac{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

Der Division liegt die dritte Binomische Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ zugrunde.

Man visualisiert die komplexen Zahlen durch Erweiterung der Zahlengerade zu einer Zahlenebene:

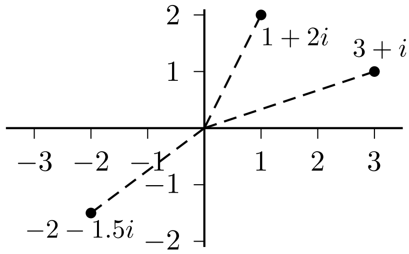

Abbildung 1: komplexe Zahlenebene

Betrag einer komplexen Zahl

Mit $|c|$ bezeichnet man den sogenannten "Betrag" einer komplexen Zahl c und er ist definiert durch

$$|c| := \sqrt{\mathfrak{Re}(c)^2 + \mathfrak{Im}(c)^2} \qquad \text{oder äquivalent}$$
$$|a+ib| := \sqrt{a^2+b^2} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

Die reelle Zahl $|c|$ misst daher nach dem Satz des Pythagoras die Länge der Strecke vom Ursprung $(0,0)$ zum Punkt $a+ib$:

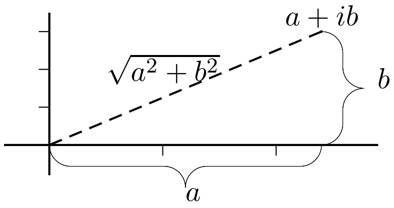

Abbildung 2: $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

Für komplexe Zahlen z_1, z_2 gilt:

1. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $|z_1| \geq |z_1 + z_2| - |z_2|$

Die dritte Ungleichung nennt man *Dreiecksungleichung*. Im Grunde beinhaltet sie die Aussage, dass die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist. Der Bezug zu einem Dreieck ergibt sich aus folgender Zeichnung:

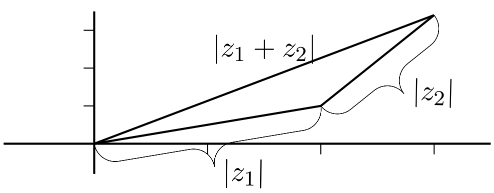

Abbildung 3: Dreiecksungleichung