Karlsruhe Institute of Technology (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Dipl.-Math.techn. Rainer Mandel

1. Übungsblatt zum Schnupperkurs

Aufgabe 1: Vollständige Induktion

Verfizieren Sie die folgenden Aussagen für $n = 1, 2, 3$ und beweisen Sie sie anschließend für beliebige $n \in \mathbb{N}$:

i) $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$ ii) $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

iii) $3^n + 2^{3n-2}$ ist durch 5 teilbar.

Zur Erinnerung:

- $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ und $a^0 = 1$ für $a \neq 0$,
- a teilt b, wenn es eine natürliche Zahl m gibt mit $a \cdot m = b$.

Aufgabe 2: Fibonacci-Modell

Wie muss das der Fibonacci-Folge zugrunde liegende mathematische Modell - jeweils im Vergleich zum ursprünglichen Modell - modifiziert werden, wenn

1. zu Beginn statt einem nun 5 fortpflanzungsfähige Pärchen existieren sollen?
2. jedes nach zwei Monaten fortpflanzungsfähige Kaninchenpaar monatlich 2 Pärchen zur Welt bringt?
3. ein Kaninchenpaar erst nach drei Monaten geschlechtsreif wird und dann monatlich vier Pärchen zur Welt bringt?

Leiten Sie zur Beantwortung der Frage analog zum Vorgehen in der Vorlesung eine modellierende Rekursionsgleichung mit Anfangswert X_0 für die jeweilige Lösung X_t des Problems her und bestimmen Sie in den ersten beiden Fällen die explizite Lösung.

Aufgabe 3: Konvergenz

Zeigen Sie, dass die durch $X_t := \frac{1}{t^2}$ und $Y_t := \frac{t+2t^2}{2+3t^2}$ definierten Folgen $(X_t), (Y_t)$ konvergieren. Wie lauten die jeweiligen Grenzwerte?