Karlsruhe Institute of Technology (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Dipl.-Math.techn. Rainer Mandel

1. Übungsblatt zum Schnupperkurs

Aufgabe 1: Vollständige Induktion

Verfizieren Sie die folgenden Aussagen für $n = 1, 2, 3$ und beweisen Sie sie anschließend für beliebige $n \in \mathbb{N}$:

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii) $3^n + 2^{3n-2}$ ist durch 5 teilbar.

Zur Erinnerung:

- $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ und $a^0 = 1$ für $a \neq 0$,
- a teilt b, wenn es eine natürliche Zahl m gibt mit $a \cdot m = b$.

Musterlösung:

i) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1, \qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{2} i = 1 + 2 = 3, \qquad \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

$$\sum_{i=1}^{3} i = 1 + 2 + 3 = 6, \qquad \frac{3(3+1)}{2} = 6\,,$$

also sind die Behauptungen für $n = 1, 2, 3$ wahr. Insbesondere ist der Induktionsanfang erfolgreich und wir können für den Induktionsschritt annehmen, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Die Formel gilt also für $n + 1$, was zu zeigen war.

ii) Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1, && \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 \\
&\sum_{i=1}^{2} i^2 = 1^2 + 2^2 = 5, && \frac{2(2+1)(4+1)}{6} = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{6} = 5 \\
&\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14, && \frac{3(3+1)(6+1)}{6} = \frac{3\cdot 4\cdot 7}{6} = 14\,,
\end{aligned}
$$

d.h. die Aussagen sind für $n = 1, 2, 3$ verifiziert. Nehmen wir analog zu oben an, die Behauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}
\end{aligned}
$$

iii) Es gilt

$$
\begin{aligned}
3^1 + 2^{3-2} &= 3 + 2 = 5, \\
3^2 + 2^{6-2} &= 9 + 16 = 25 = 5 \cdot 5 \\
3^3 + 2^{9-2} &= 27 + 128 = 155 = 5 \cdot 31
\end{aligned}
$$

und die Behauptung ist für $n = 1, 2, 3$ gezeigt. Nehmen wir also an, die Behauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gebe eine natürliche Zahl m mit $3^n + 2^{3n-2} = 5m$. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
3^{n+1} + 2^{3(n+1)-2} &= 3^n \cdot 3 + 2^{3n+1} \\
&= (5m - 2^{3n-2}) \cdot 3 + 2^{3n+1} \\
&= 5 \cdot 3m - 3 \cdot 2^{3n-2} + 8 \cdot 2^{3n-2} \\
&= 5 \cdot (3m - 2^{3n-2})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Fibonacci-Modell

Wie muss das der Fibonacci-Folge zugrunde liegende mathematische Modell - jeweils im Vergleich zum ursprünglichen Modell - modifiziert werden, wenn

1. zu Beginn statt einem nun 5 fortpflanzungsfähige Pärchen existieren sollen?
2. jedes nach zwei Monaten fortpflanzungsfähige Kaninchenpaar monatlich 2 Pärchen zur Welt bringt?
3. ein Kaninchenpaar erst nach drei Monaten geschlechtsreif wird und dann monatlich vier Pärchen zur Welt bringt?

Leiten Sie zur Beantwortung der Frage analog zum Vorgehen in der Vorlesung eine modellierende Rekursionsgleichung mit Anfangswert X_0 für die jeweilige Lösung X_t des Problems her und bestimmen Sie in den ersten beiden Fällen die explizite Lösung.

Musterlösung:

1. Die Anfangsgröße der Population ist gegeben durch X_0, man fordert daher $X_0 = 5$. Da die Pärchen zu Beginn nicht fortpflanzungsfähig sind, gilt zudem $X_1 = 5$.

   1.Möglichkeit: direkt
   Die Differenzengleichung lautet wieder $X_{t+1} = X_t + X_{t-1}$ und der Ansatz $X_t = \lambda^t$ führt wie in der Vorlesung auf

   $$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \qquad \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

   und Lösungen der Form $X_t = a\lambda_1^t + b\lambda_2^t$. Die Anfangsbedingungen liefern:

   $$\begin{aligned} X_0 = 5,\ X_1 = 5 \quad &\Longrightarrow \quad a + b = 5, \quad a\lambda_1 + b\lambda_2 = 5 \\ &\Longrightarrow \quad b = 5 - a, \quad a\lambda_1 + (5-a)\lambda_2 = 5 \\ &\Longrightarrow \quad a = \frac{5 - 5\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{5 - 5\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{2\sqrt{5}}{2}} = \frac{5\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}} \\ & \quad b = 5 - a = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}-5}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

   Es folgt:

   $$X_t = \frac{5\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}} \cdot \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^t + \frac{5\sqrt{5}-5}{2\sqrt{5}} \cdot \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^t$$

   2.Möglichkeit: elegant
   Die Größe $Y_t := \frac{1}{5}X_t$ erfüllt die Rekursion

   $$Y_{t+1} = \frac{1}{5}X_{t+1} = \frac{1}{5}(X_t + X_{t-1}) = \frac{1}{5}X_t + \frac{1}{5}X_{t-1} = Y_t + Y_{t-1}$$

sowie $Y_0 = \frac{1}{5}X_0 = 1$. Darum gilt für Y_t die Formel von Binet (siehe Vorlesung) und X_t ist gegeben durch

$$X_t = 5Y_t = 5 \cdot \Big[\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \cdot \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^t + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cdot \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^t\Big]$$

2. Der Nachwuchs wurde im Fibonacci-Modell durch die Variable x modelliert mit $X_{t+1} = X_t + x$. Im modifizierten Modell der Aufgabenstellung kommen jedoch doppelt so viele Nachkommen wie im ursprünglichen Modell hinzu, da jedes Kaninchenpaar ab den zweiten Monat monatlich zwei und nicht ein Pärchen wirft. Es gilt daher die Rekursion

$$X_{t+1} = X_t + 2X_{t-1}$$

und $X_0 = 1$ wie im herkömmlichen Modell. Der Ansatz $X_t = \lambda^t$ liefert

$$\begin{aligned} X_{t+1} = X_t + 2X_{t-1} \qquad (t \in \mathbb{N}) \quad &\Longrightarrow \lambda^{t+1} = \lambda^t + 2\lambda^{t-1} \qquad (t \in \mathbb{N}) \\ &\Longrightarrow \quad \lambda^2 = \lambda + 2 \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

Zur Gewinnung der Lösungsformel für $X_t = a\lambda_1^t + b\lambda_2^t$ verwenden wir die Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} X_0 = 1,\ X_1 = 1 \quad &\Longrightarrow \quad a + b = 1, \quad a\lambda_1 + b\lambda_2 = 1 \\ &\Longrightarrow \quad b = 1 - a, \quad a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2 = 1 \\ &\Longrightarrow \quad a = \frac{1-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1-2}{-1-2} = \frac{1}{3} \\ & \quad b = 1 - a = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Die Lösung lautet daher

$$X_t = a\lambda_1^t + b\lambda_2^t = \frac{1}{3} \cdot (-1)^t + \frac{2}{3} \cdot 2^t$$

3. Wieder muss der Nachwuchs x in $X_{t+1} = X_t + x$ geeignet angepasst werden. X_{t-2} Kaninchenpaare sind zum Zeitpunkt $t+1$ 3 Monate alt oder älter, sodass für x gelten muss $x = 4X_{t-2}$, sprich

$$X_{t+1} = X_t + 4X_{t-2}, \qquad X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1 \text{ für } t \geq 2$$

Der entsprechende Ansatz würde wieder $X_t = \lambda^t$ lauten, was zu folgender Gleichung führt:

$$\begin{aligned} X_{t+1} = X_t + 4X_{t-2} \qquad (t \in \mathbb{N}) \quad &\Longrightarrow \lambda^{t+1} = \lambda^t + 4\lambda^{t-2} \qquad (t \in \mathbb{N}) \\ &\Longrightarrow \quad \lambda^3 = \lambda^2 + 4 \\ &\Longrightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda + 2) = 0 \end{aligned}$$