Karlsruhe Institute of Technology (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Dipl.-Math.techn. Rainer Mandel

2. Übungsblatt zum Schnupperkurs

Aufgabe 1: Vollständige Induktion

Sei $a \neq 1$. Beweisen Sie für alle $t \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\sum_{i=0}^{t-1} a^i = \frac{1-a^t}{1-a}.$$

Musterlösung:

Induktionsanfang: Für $t = 1$ stimmt die Behauptung wegen

$$\begin{aligned} \text{l.S.} &= \sum_{i=0}^{0} a^i = a^0 = 1, \\ \text{r.S.} &= \frac{1-a^1}{1-a} = 1. \end{aligned}$$

Induktionsschritt: Es gelte die Behauptung für ein $t \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\sum_{i=0}^{t} a^i = \sum_{i=0}^{t-1} a^i + a^t = \frac{1-a^t}{1-a} + \frac{a^t - a^{t+1}}{1-a} = \frac{1-a^{t+1}}{1-a}$$

und die Behauptung für $t+1$ ist gezeigt.

Bemerkung: Im Falle $a = 1$ ist die obige Formel sinnlos, da durch 0 dividiert wird. Stattdessen gilt $\sum_{i=0}^{t-1} a^i = \sum_{i=0}^{t-1} 1 = t$.

Aufgabe 2: Rekursion 2.Ordnung mit doppelter Nullstelle

Verifizieren Sie Satz 2.3 für die Folgenglieder $t = 1, 2, 3$. Beweisen Sie die Lösungsformel

$$X_t = \lambda^t(1-t)X_0 + t\lambda^{t-1}X_1$$

mit vollständiger Induktion.

Musterlösung:

Induktionsanfang:[1] Wegen

$$\lambda^0(1-0)X_0 + 0\cdot\lambda^{0-1}X_1 = X_0,$$
$$\lambda^1(1-1)X_0 + 1\cdot\lambda^{1-1}X_1 = X_1$$

stimmt die Behauptung für $t = 0, 1$.
Induktionsschritt: Es gelte die Behauptung für $t-1, t$. Dann gilt

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= 2\lambda X_t - \lambda^2 X_{t-1} \\ &= 2\lambda\cdot(\lambda^t(1-t)X_0 + t\lambda^{t-1}X_1) - \lambda^2\cdot(\lambda^{t-1}(2-t)X_0 + (t-1)\lambda^{t-2}X_1) \\ &= (2\lambda^{t+1}(1-t) - \lambda^{t+1}(2-t))X_0 + (2t\lambda^t - (t-1)\lambda^t)X_1 \\ &= \lambda^{t+1}(-t)X_0 + (t+1)\lambda^t X_1. \end{aligned}$$

Dies beweist die Formel für $t+1$.

Aufgabe 3: Lösung von Rekursionsgleichungen

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Rekursionsgleichungen

i) $X_{t+1} = 3X_t - 4$,

ii) $X_{t+1} = 2X_t - 2X_{t-1}$,

iii) $X_{t+1} = -2X_t - X_{t-1}$.

Wie lauten die Lösungen unter der Zusatzbedingung $X_0 = 1$?

i) Nach dem Satz der Vorlesung gilt für $a = 3, b = -4$

$$\begin{aligned} X_t &= a^t X_0 + b\frac{1-a^t}{1-a} \\ &= 3^t X_0 - 4\frac{1-3^t}{1-3} \\ &= 3^t X_0 + 2(1-3^t). \end{aligned}$$

Für $X_0 = 1$: $X_t = 2 - 3^t$.

[1] Es handelt sich hier um eine Variante der vollständigen Induktion, bei der die Behauptung zunächst für $t = 0, 1$ gezeigt und im Induktionsschritt von $t-1, t$ auf $t+1$ geschlossen wird.

ii) Die Nullstellen des Polynoms $P(x) = x^2 - 2x + 2$ lauten $\lambda_1 = 1 - i, \lambda_2 = 1 + i$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{\lambda_2 X_0 - X_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1^t + \frac{-\lambda_1 X_0 + X_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2^t \\ &= \frac{(1+i)X_0 - X_1}{2i} (1-i)^t + \frac{-(1-i)X_0 + X_1}{2i} (1+i)^t. \end{aligned}$$

Für $X_0 = 1$: $X_t = \frac{1+i-X_1}{2i}(1-i)^t + \frac{i-1+X_1}{2i}(1+i)^t$.

iii) Es ergibt sich $P(x) = x^2 + 2x + 1$ und $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Aufgabe 1 liefert

$$\begin{aligned} X_t &= \lambda^t (1-t) X_0 + t\lambda^{t-1} X_1 \\ &= (-1)^t (1-t) X_0 + t(-1)^{t-1} X_1 \\ &= (-1)^t (X_0 - t(X_0 + X_1)). \end{aligned}$$

Für $X_0 = 1$: $X_t = (-1)^t (1 - t(1 + X_1))$.