Karlsruhe Institute of Technology (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Dipl.-Math.techn. Rainer Mandel

3. Übungsblatt zum Schnupperkurs

Aufgabe 1: Matrix-Vektor-Produkt

Berechnen Sie folgende Matrix-Vektor-Produkte gemäß der Definition der Vorlesung:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Musterlösung:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ -2+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \\
&\text{b)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+20 \\ 5+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 13 \end{pmatrix} \\
&\text{c)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+0 \\ 0+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Eigenwerte I

Bestimmen Sie die Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor der Matrizen

$$\text{i) } A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ii) } B := \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ keine reellen Eigenwerte besitzt.

Musterlösung:

i) Das zu lösende Gleichungssystem für a_1, a_2, λ lautet

$$\begin{cases} 0 &= (1-\lambda)a_1 + 3a_2 \\ 0 &= a_1 + (-1-\lambda)a_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 &= 0 \cdot a_1 + \big((\lambda-1)(-1-\lambda)+3\big)a_2 \\ 0 &= a_1 + (-1-\lambda)a_2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 0 &= (-\lambda^2+4)a_2 \\ 0 &= a_1 + (-1-\lambda)a_2 \end{cases}$$

Wir verlangen $a_2 \neq 0$ und erhalten $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$. Für λ_1 erhalten wir die Bedingung $0 = a_1 + a_2$, für λ_2 $0 = a_1 - 3a_2$.

$$\text{Eigenwert } \lambda_1 = -2, \quad \text{Eigenvektor } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\text{Eigenwert } \lambda_2 = 2, \quad \text{Eigenvektor } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) Das entsprechende lineare Gleichungssystem wird analog zu oben auf die quadratische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, also existiert nur ein Eigenwert $\lambda = 1$. Also

$$\begin{cases} 0 & = (-2-\lambda)a_1 + 3a_2 \\ 0 & = -3a_1 + (4-\lambda)a_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 & = -3a_1 + 3a_2 \\ 0 & = -3a_1 + 3a_2 \end{cases}$$

Somit erhalten wir zum Eigenwert $\lambda = 1$ z.B. den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

iii) Das Gleichungssystem für die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ wird mit dem obigen Verfahren auf die quadratische Gleichung $(1-\lambda)^2 + 4 = 0$ reduziert. Es kann also keine reellen (wohl aber komplexe!) Eigenwerte geben.

Aufgabe 3: Eigenwerte II

Bestimmen Sie die Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor einer

i) Diagonalmatrix: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ii) oberen Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ mit $b \neq 0$

Musterlösung:

i) Eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= (a-\lambda)a_1 + 0 \cdot a_2 \\ 0 &= 0 \cdot a_1 + (c-\lambda)a_2 \end{aligned}$$

Somit sind die zwei Eigenwerte gegeben durch $\lambda_1 = a$ und $\lambda_2 = c$ mit zugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii) Eine obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ führt auf das lineare Gleichungssystem

$$0 = (a-\lambda)a_1 + b \cdot a_2, \qquad 0 = 0 \cdot a_1 + (c-\lambda)a_2$$

Somit ist ein Eigenwert durch c gegeben und die Bedingungsgleichung für die Eigenvektoren lautet $(a-c)a_1 + ba_2 = 0$, d.h. ein Eigenvektor ist durch $\begin{pmatrix} b \\ a-c \end{pmatrix}$ gegeben.

Der zweite Eigenwert lautet a und die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert erfüllen die Bedingung $ba_2 = 0,\ (c-a)a_2 = 0$. Folglich ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein geeigneter Eigenvektor.

Aufgabe 4: Lösung einer 2-dimensionalen Rekursionsgleichung

Geben Sie die allgemeine Lösung der Rekursion

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$$

an. Wie lauten sämtliche Lösungen mit der Eigenschaft

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}?$$

Musterlösung:

Die Eigenwerte der obigen Matrix lauten 11 und -11 mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Formel der Vorlesung liefert

$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = 11^t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (-11)^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Im Falle $\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} &= 11^{-2} \cdot 11^t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (-11)^{-2} \cdot (-11)^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 11^{t-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (-11)^{t-2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Im Vergleich zu der obigen um zwei Zeiteinheiten versetzt!)